

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Алтайский государственный аграрный университет»**

И.Я. ФЕДОРЕНКО

**ВИБРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И УСТРОЙСТВА В АПК**

Монография

Барнаул
РИО Алтайского ГАУ
2016

УДК 631.3:621.929.7

Рецензенты:

докт. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика и механика машин» ФГБОУ ВО АлтГТУ В.И. Поддубный;

докт. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Сельскохозяйственная техника и технологии» ФГБОУ ВО Алтайский ГАУ В.И. Беляев.

Федоренко И.Я. Вибрационные процессы и устройства в АПК: монография. – Барнаул: РИО Алтайского ГАУ, 2016. – 289 с.

ISBN 978-5-94485-296-0

В научном издании рассматриваются теоретические основы технологических процессов АПК, осуществляемых посредством вибрационного воздействия на обрабатываемые среды.

Адресовано научным работникам, конструкторам, преподавателям вузов и всем тем, кто интересуется проблемами вибрационной механики и полезного использования вибраций в сельском хозяйстве, пищевой и перерабатывающей промышленности.

Может быть использовано в качестве учебного пособия для магистрантов и аспирантов инженерных специальностей аграрных вузов.

ISBN 978-5-94485-296-0

© Федоренко И.Я., 2016

© ФГБОУ ВО Алтайский ГАУ, 2016

© РИО Алтайского ГАУ, 2016

Оглавление

Предисловие	7
Введение	9
1. Методы исследования и математические модели вибрационных машин	23
1.1. Элементы прикладной теории колебаний и динамики машин	23
1.1.1. Кинематика колебательных процессов	23
1.1.2. Действующие силы при колебаниях	26
1.1.3. Методы получения уравнений колебаний	29
1.1.4. Основные этапы построения динамической модели вибрационного объекта	30
1.1.5. Классификация вибрационных машин по особенностям динамической схемы и привода	35
1.2. Колебания линейных систем вибромашин с одной степенью свободы	38
1.2.1. Закономерности колебаний рабочего органа	38
1.2.2. Энергетические соотношения в вибрационной машине	43
1.2.3. Особенности вынужденных колебаний при инерционном и кинематическом их возбуждении	47
1.2.4. Почему большинство вибрационных машин работает в резонансном режиме	50
1.3. Вынужденные колебания в системах со многими степенями свободы	56
1.3.1. Система с двумя степенями свободы без диссипации	56
1.3.2. Учет диссипации в системе с двумя степенями свободы	58
1.3.3. Система «трактор-орудие» с упруго-демпфирующим сцепным устройством	61
1.3.4. Одномассная система с двумя степенями свободы	64
1.3.5. Колебательные системы с n степенями свободы	68
1.4. Методы решения уравнений нелинейных колебательных систем	71
1.4.1. Признаки нелинейных систем	71
1.4.2. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова	74
1.4.3. Метод гармонического баланса	80

1.4.4. Метод малого параметра Пуанкаре-Ляпунова	81
1.4.5. Метод прямого разделения движений	82
1.4.6. Численный метод решения нелинейных уравнений колебаний	86
1.5. Колебания одномерных систем в нелинейной постановке	89
1.5.1. Модель Дуффинга при моногармоническом нагружении	89
1.5.2. Бигармоническое нагружение модели Дуффинга	94
1.5.3. Вынужденные колебания с нелинейным сопротивлением	96
1.5.4. Виброударные системы	99
1.6. Автоколебания	103
1.6.1. Общие сведения об автоколебательных системах	103
1.6.2. Автоколебательные рабочие органы почвообрабатывающих машин	105
1.6.3. Автоколебания стержня на вращающихся вальцах	111
1.6.4. Гидротаран как автоколебательное устройство	112
1.6.5. Пульсатор доильного аппарата	114
1.7. Параметрические колебания	116
1.7.1. Общие понятия	116
1.7.2. Устойчивость верхнего положения маятника	118
1.7.3. Параметрическое возбуждение вибромашин на основе роторно-бегунковых систем	120
1.8. Самосинхронизация неуравновешенных роторов и родственные явления	124
1.8.1. Общие сведения	124
1.8.2. Самосинхронизация дебалансных вибровозбудителей	126
1.8.3. Вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора	135
1.8.4. Самосинхронизация планетарных вибровозбудителей	137
2. Эффект вибрационного перемещения и его использование в сельскохозяйственной технологии	141
2.1. Модели безотрывного вибрационного перемещения частицы	141
2.1.1. Общие замечания	141

2.1.2. Частица на вибрирующей плоской горизонтальной поверхности	142
2.1.3. Частица на вибрирующей поверхности при действии дополнительной постоянной силы	148
2.1.4. Перемещение частицы в случае, когда направления вибраций горизонтальной шероховатой поверхности и дополнительной силы перпендикулярны	157
2.2. Движение плоской частицы по горизонтальной плоскости, совершающей круговые поступательные колебания	163
2.2.1. Задача Жуковского о плоском рассеве	163
2.2.2. Возмущенная задача Н.Е. Жуковского	166
2.3. Разделение компонентов сыпучих смесей под действием вибраций	172
2.3.1. Движение частицы в среде с сопротивлением типа сухого трения, совершающей вертикальные колебания	172
2.3.2. Разделение смеси на вибрирующих поверхностях	175
2.4 Модели виброперемещения с подбрасыванием материала	177
2.4.1 Частица на вертикально вибрирующей платформе	177
2.4.2 Наклонные вибрации платформы	180
3. Динамика свободного слоя сыпучего материала в условиях вибровоздействий	191
3.1 Недостатки модели материальной частицы	191
3.2 Экспериментально наблюдаемые явления в вибрируемом слое сыпучего материала	193
3.3. Слой сыпучего материала при вибрациях как синергетическая система	201
3.4. Примеры вибрационных устройств с обработкой слоя сыпучего материала значительной толщины	208
4. Виброреология сельскохозяйственных материалов	212
4.1. Общие положения	212
4.2. Универсальная реологическая модель сельскохозяйственных материалов	213
4.3. Распространение вибраций в стесненном слое сельскохозяйственного материала	220

4.4. Использование вибраций для управления реологическими свойствами стесненного слоя	226
4.5. Нелинейная реологическая модель как модификация модели Бюргерса	229
4.6. Виброреология взаимодействия вибрационных рабочих органов и почвы	235
5. Действие вибраций на жидкие и многофазные среды	246
5.1. Общие замечания	246
5.2. Виброреология многофазных сред	247
5.2.1. Основные реологические законы	247
5.2.2. Ньютоновское течение при вибрациях неньютоновских жидкостей	249
5.2.3. Возрастание под действием вибраций скорости течения неньютоновских жидкостей	252
5.2.4. Законы колебаний твердых частиц в несущей фазе	253
5.3. Пространственные структуры в вибрируемых объемах жидкости	255
5.3.1. Рябь Фарадея	255
5.3.2. Динамика многофазной среды «жидкость-газ» в закрытой емкости	259
5.4. Виброкавитация и способы ее осуществления	261
5.5. Некоторые другие эффекты вибраций	266
5.5.1. Виброструйный эффект	266
5.5.2. Вибрационная инжекция газа в жидкость	267
5.5.3. Вибрационное заполнение жидкостью глухих полостей	268
5.6. Вибрационные насосы	270
5.6.1. Общие сведения	270
5.6.2. Принцип действия вибрационных насосов	271
Библиографический список	276

Предисловие

В агропромышленном комплексе вибрационные технологические машины получили большое распространение. В частности, очистка зерна от примесей базируется в основном на вибрационной технологии. Многие другие процессы, особенно связанные с обработкой сыпучих (зернистых) сельскохозяйственных материалов, могут быть успешно осуществлены при помощи вибрационного воздействия. Широко известны и почвообрабатывающие машины с автоколебательными рабочими органами. В последние годы получены положительные результаты по обработке вибрациями различных многофазных средств и интенсификации на этой основе тепло-, массо- и диффузионно-обменных процессов.

В основу данной книги положен материал, накопленный в учебных и научно-исследовательских учреждениях нашей страны по полезному использованию вибраций в различных технологических процессах. Включены также результаты НИР кафедры механизации производства и переработки сельскохозяйственной продукции Алтайского ГАУ, полученные при выполнении темы «Развитие теории вибрационных машин различного целевого назначения для разработки высокоэффективных технологических процессов в агропромышленном комплексе» (№ г.р. 01201157188). Главный итог исследований кафедры видится в доказательстве того, что вибрируемый зернистый слой является синергетической системой, а его динамическое поведение качественно описывается тремя простыми нелинейными уравнениями, известными как аттрактор Лоренца. На основе этого развита аналогия движения вибрируемого слоя сыпучего материала и вязкой жидкости при тепловой конвекции. Компьютерное моделирование отображает визуальную картину вибрационной конвекции в сыпучем материале, идентичную наблюдаемой в эксперименте.

Кроме этого в книгу вошли новые результаты по автоколебательным рабочим органам почвообрабатывающих орудий, колебаниям системы «трактор – почвообрабатывающая машина», сопротивлению вибрационных рабочих органов и ряд других. Лаконично, по-новому, изложены разделы, касающиеся

преобразования сухого трения в различных технологических процессах и сопутствующих эффектах.

Автор благодарен коллегам по научной работе и ученикам, без взаимодействия и общения с которыми эта книга, скорее всего, не появилась. Это доктора технических наук С.В. Золотарев, Д.Н. Пирожков, У.К. Сабиев, И.Б. Шагдыров, а также кандидаты технических наук И.Ю. Александров, С.Н. Васильев, С.А. Белокурено, А.А. Гнездилов, А.М. Левин, В.И. Лобанов, И.А. Наумов, А.А. Смышляев, С.А. Сорокин, Р.А. Котов, А.С. Федоренко.

Многие задумки автора были воплощены в металл известным в Алтайском крае конструктором М.Г. Желтуновым. Время совместной конструкторской работы вспоминается очень тепло.

Ряд общих результатов, полученных с перечисленными выше исследователями, также включен в книгу.

В отличие от ранее изданной монографии [134], данная книга содержит ряд известных, ставших классическими, результатов. Это позволяет использовать ее в качестве учебного пособия для магистрантов и аспирантов аграрных вузов.

Неоценимую помощь при оформлении рукописи оказали сотрудницы кафедры Т.С. Грушко и Л.Г. Иванова, за что им большое спасибо.

Автор глубоко благодарен рецензентам монографии: докт. техн. наук профессору Алтайского ГТУ В.И. Поддубному и докт. техн. наук профессору Алтайского ГАУ В.И. Беляеву за труд по просмотру рукописи и ценные замечания.

Февраль 2016 года,
г. Барнаул

Введение

Анализ современного состояния технической базы АПК России свидетельствует о том, что ее уровень нельзя признать удовлетворительным. Ставка на импортную технику, утвердившаяся в умах многих чиновников и руководителей, не отвечает финансовым возможностям производителей сельскохозяйственной продукции ввиду высокой цены оборудования и запасных частей, а также потребностям и интересам России по развитию собственного машиностроения, созданию дополнительных рабочих мест и обеспечению продовольственной безопасности страны.

В решении этих проблем вибрационной технике отводится важная роль. Она рассматривается, по оценкам академика РАН К.В. Фролова, как основа технологии будущего. Это направление необходимо развивать еще и потому, что советская и российская научная школа давно удерживает приоритет в развитии науки о колебаниях.

Применение виброметода в различных отраслях хозяйства стало возможным благодаря усилиям многих ученых, в числе которых крупнейшие советские и российские механики: И.И. Артоболевский, И.И. Блехман, И.И. Быховский, Р.Ф. Ганиев, И.Ф. Гончаревич, В.Ф. Журавлев, Ю.И. Неймарк, В.Н. Потораев, К.М. Рагульскис, Н.В. Михайлов, Р.Ф. Нагаев, Я.Г. Пановко, П.А. Ребиндер, Н.Б. Урьев, К.В. Фролов, К.Ш. Ходжаев, В.Н. Челомей, С.Ф. Яцун и многие другие.

Существенный вклад в разработку вибрационных машин и процессов агропромышленного комплекса внесли П.М. Василенко, В.П. Горячкин, В.В. Гортинский, А.А. Дубровский, П.М. Заика, П.Н. Лапшин, П.И. Леонтьев, Г.Е. Листопад, Г.Д. Терсков, В.М. Усаковский, А. В. Фоминых и другие ученые.

В настоящее время исследованиями в области полезного использования вибраций в сельском хозяйстве активно занимаются следующие учебные и научные учреждения: Алтайский ГАУ, Башкирский ГАУ, Волгоградский ГАУ, Донской ГАУ, Иркутский ГАУ, Казанский ГАУ, Красноярский ГАУ, Курганская ГСХА, Омский ГАУ, Оренбургский ГАУ, РГАЗУ, Южно-Уральский ГАУ, СибИМЭ, Кемеровский ТИПП и другие.

Усилиями многих ученых, коллективами конструкторов и испытателей создана **вибрационная техника** как совокупность методов и средств возбуждения, полезного применения и измерения вибраций, вибрационных испытаний, вибрационной защиты и вибрационной диагностики.

Машина, исполнительному органу которой сообщают вибрацию для осуществления или интенсификации выполняемого технологического процесса или повышения качества выполняемой работы, называется вибрационной.

В наши дни машины вибрационного принципа действия получили большое распространение, являясь существенным фактором интенсификации различных технологических процессов. На предприятиях сельского хозяйства и перерабатывающей промышленности вибрации успешно применяются при обработке различных зернистых (по другой терминологии – сыпучих, дисперсных, гранулированных) материалов и продуктов: зерна, муки, сахара-песка, крахмала, крупы, какао-бобов, мясных фаршей, сухих смесей для детского питания и т.д. В процессе их просеивания, центрифугирования, сепарирования, транспортирования, смешивания, дозирования, измельчения, обжарки, сушки, резки, уплотнения вибрационные рабочие органы оказывают требуемое технологическое воздействие на слой этих материалов.

В почвообработке хорошо известны вибрационные бороны и культиваторы с автоколебательными рабочими органами.

Поражает диапазон применения вибраций – от вибродуговой наплавки восстанавливаемых деталей до вычесывания пуха коз и массажа вымени коров.

Далеко неполная классификация вибрационных процессов АПК приведена на рисунке 1.

Разработка вибрационной техники для сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий затруднена по многим причинам.

Во-первых, это сложность протекающих в вибрационных машинах процессов, хотя сами машины по конструкции могут быть весьма простыми. Вибрационное воздействие призвано обеспечить такое динамическое состояние обрабатываемой среды, которое способствует интенсификации и качественному протеканию технологического процесса при одновременном снижении энергосиловых параметров.

При этом происходит сложнейшее взаимодействие вибрационных рабочих органов с рабочей средой, сопровождающееся переносом энергии, массы, импульса и т. д. Процесс в целом протекает в машине с определенными геометрическими характеристиками, также влияющими на ход этого процесса. Особенно существенное влияние на качество обработки органических природных материалов оказывают кинематические и другие параметры вибрационных рабочих органов, обуславливающие интенсивность силового и энергетического взаимодействия в системе.

Во-вторых, трудности вызывает разнообразие физико-механических и реологических свойств сельскохозяйственных материалов, сырья и продуктов. Это усложняет установление причинно-следственных связей рабочего процесса машины и влияние на конечный результат ее функционирования. Сопротивление рабочей среды в виде сухого трения, проявление ею неньютоновской вязкости, ползучести деформаций, релаксации напряжений, тиксотропных свойств приводят к нелинейности дифференциальных уравнений, описывающих процессы в вибрационных технологических машинах и, как следствие, к затруднениям с их расчетом и анализом. С другой стороны, нелинейность – источник многих положительных эффектов и явлений вибраций, нашедших применение в технологии.

Все многообразие технологических процессов, осуществляемых в вибрируемом слое, можно разделить на три группы, представляемые *моделями*:

а) свободного вибрируемого слоя (уплотнение, сепарация, смешивание, дозирование, сушка, гранулирование окатыванием, транспортирование и т.д.);

б) стесненного вибрируемого слоя (гранулирование пресованием, брикетирование, дробление, уплотнение с пригрузом и т.д.);

в) вибрируемого слоя с преобладанием фрикционного взаимодействия с рабочим органом (грейферование, резание, транспортирование без подбрасывания и т.д.).

Указанное разграничение связано с тем обстоятельством, что в свободном слое ведущую роль в формировании движения частиц играют силы тяжести, инерции, аэродинамические сопротивления. В стесненном слое эти силы малы в сравнении с действующими извне сжимающими нагрузками. В отдельную группу выделены процессы, главные особенности которых протекают в зоне фрикционного взаимодействия исполнительного органа и рабочей среды. Эффекты распространения вибраций в толщу обрабатываемого материала, а также циркуляции частиц здесь либо не возникают, либо имеют место в подслое небольшой толщины.

Высокая *технологическая эффективность* вибрации обусловлена четырьмя группами эффектов [18, 19]:

1. Изменение динамического поведения колебательных систем под действием вибрации. К этой группе эффектов относятся исчезновение прежних и появление новых положений равновесия и видов движения системы, смена характера положений равновесия и т.п.

2. Эффекты вибрационного перемещения. Сюда относятся эффекты вибрационного транспортирования твердых тел и сыпучих материалов, вибропогружение и виброудерживание твердых тел, сепарация (разделение) частиц материала по их свойствам на вибрирующих поверхностях и в колеблющихся сосудах с сыпучей средой или с жидкостью, возникновение медленных потоков сыпучих тел или течений жидкости в вибрирующих сосудах, своеобразное поведение сыпучих тел в таких сосудах, дрейф и локализация частиц в неоднородных вибрационных полях.

3. Виброреологические эффекты, т. е. изменение под действием вибрации реологических свойств тел по отношению к медленным воздействиям, или, как иногда говорят, кажущееся изменение реологических свойств тел под действием вибраций. Речь идет о таких эффектах, как кажущееся превращение в условиях вибрации сухого трения в вязкое, снижение коэффициентов сухого трения, кажущееся изменение коэффициента вязкости, эффект виброползучести и многое другое.

4. Возникновение интенсивного механического взаимодействия между частицами и объемами многокомпонентных систем. К этой группе эффектов относятся разрыхление сыпучей среды в вибрирующих лотках и сосудах, образование так называемого виброкипящего слоя, возникновение интенсивных относительных колебаний твердых частиц, различающихся по плотности и размерам, в колеблющейся жидкости или в сыпучей среде и т.п.

Рассмотрим далее некоторые типы вибрационных технологических машин.

Наиболее широко вибрации применяют в зерноочистительных машинах. Несколько десятилетий подряд в нашей стране выпускаются **воздушно-решетные машины** для предварительной очистки зернового вороха, поступающего от зерноуборочных комбайнов, от колосков, соломы, камней, мелких, легких и других сорных примесей. Машина работает на ворохе колосовых, зернобобовых, масличных культур и семян трав. Один из вариантов такой машины представлен на рисунке 2.

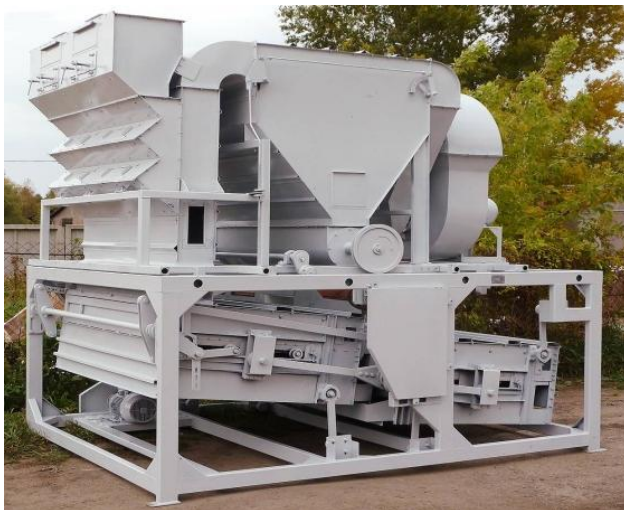


Рис. 2. Машина предварительной очистки зерна МПО, выпускаемая ООО «Новосибирсксельмаш»

Машины рассчитаны для работы в стационарных поточных линиях и устанавливаются перед зерноочистительными машинами или сушилками, а также могут работать самостоятельно.

Технология очистки в машинах состоит в последовательной очистке зерна воздухом от легких примесей и на решетках от примесей, отличающихся размерами.

Машины выпускаются производительностью 25 и 50 т/ч.

Зерноочистительные машины с самосинхронизирующимися вибровозбудителями успешно применяются на мукомольных предприятиях (рис. 3). Как правило, они устанавливаются в технологической линии перед вальцовыми станками.

Для фракционирования высококачественных порошкообразных и гранулированных материалов для нужд фармацевтической, химической и пищевой промышленности используют *просеивающие машины* и вибросита.

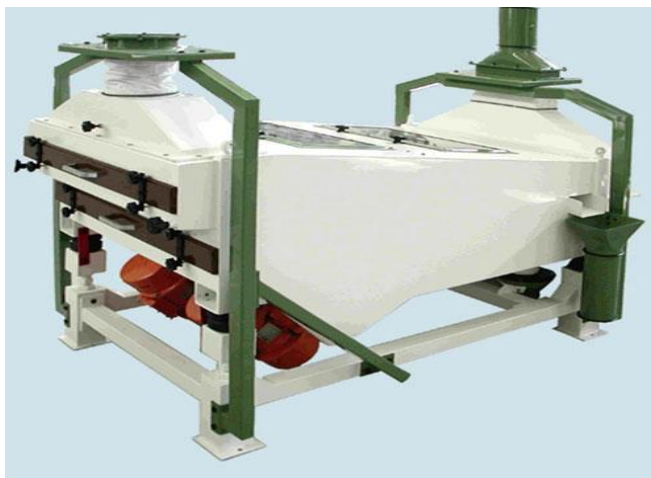


Рис. 3. Зерноочистительная машина с парой самосинхронизирующихся вибровозбудителей

Наиболее щадящий просев продукта обеспечивает качающаяся в трех плоскостях просеивающая машина германской фирмы GKM Siebtechnik (рис. 4).



Рис. 4. Качающаяся просеивающая машина компании GKM Siebtechnik (Германия)

Просев крахмала, пшеничной клейковины, сахара, лимонной кислоты, специй и приправ являются типичной областью применения данного оборудования.

Простота в исполнении оборудования позволяет быстро скорректировать рассев в соответствии с требованиями для 2-7 фракций на машину, с сохранением максимальной эффективности процесса.



Рис. 5. Вибромельница «Vibra-Drum» (1, 4 – пружины; 2 – вибропривод; 3 – подвижная рама; 5 – помольная камера; 6 – загрузочный люк; 7 – разгрузочный люк; 8 – неподвижная рама)

Мельницы «Vibra-Drum»(рис. 5), которые предлагает компания «General Kinematics» (Англия), достигают экономии энергии в 35-50% благодаря более эффективному вращательному движению материала, чем в традиционных шаровых или вращательных мельницах. Они также имеют надежную конструкцию без катков и традиционных приводов.

Мельница «Vibra-Drum» представляет собой цилиндрическую помольную камеру 5, с обеих сторон ограниченную перфорированными торцевыми сетками, которая установлена на упругих элементах (пружинах). Источником вибрации является вибровозбудитель 2, установленный на подвижной раме 3. Помольная камера 5 опирается на упругие элементы 4, установленные на подвижной раме 3. Благодаря системе пружин 1 и 4, которая связывает подвижную раму и помольную камеру, энергия для измельчения попеременно накапливается и передается помольной камере. Такой способ организации движения приводит мелющие тела в движение, мельница требует меньшее количество энергии на поддержание их в «кипящем» состоянии. Загрузка и выгрузка материала осуществляется через загрузочный 6 и выгрузочный 7 люки на корпусе помольной камеры.

Виброднище ВА (рис. 6) – устройство для разгрузки сыпучих материалов, которое благодаря вибрации гарантирует равномерную подачу материала из силоса или бункера. Монтируется снизу бункера. Предотвращает образование сводов в сыпучем материале, находящемся в бункере.



Рис. 6. Виброднище марки ВА производства ООО «Ардон» (Россия)

Смеситель вибрационный СМВ-0,4 (рис. 7) предназначен для смешения (усреднения) в периодическом режиме сыпучих, зернистых и порошкообразных материалов (веществ, компонентов), не склонных к налипанию. При необходимости или по требованию заказчика дополнительно к операции смешения возможно выполнение операции незначительного измельчения.

Рабочая камера (или рабочий орган) представляет собой сварную металлоконструкцию, выполненную в виде тора. Рабочая камера смесителя на 70-80% заполняется смешиваемыми компонентами. В нижней части тора расположен клапан разгрузки, через который выгружается готовая смесь. Вибровозбудитель инерционного типа располагается в центральной части смесителя. Ось вибропривода лежит в вертикальной плоскости и совпадает с центральной осью торовой камеры. Регулировка параметров вибрации (амплитуды, формы колебаний) осуществляется путем изменения статического момента массы дебалансов и углом их разворота относительно друг друга.



Рис. 7. Смеситель вибрационный СМВ-0,4
(ООО «Вибротехцентр-КТ», Россия): 1 – рабочая камера;
2 – патрубок загрузки; 3 – клапан разгрузки;
4 – упругие элементы; 5 – опорная рама

Системы дозирования МешаТрон® с вибрационными дозаторами применяются для непрерывного объёмного дозирования сыпучих материалов: порошков, гранулята, стружки, хлопьев и волокна (рис. 8). Используются во всех отраслях, но

преимущественно в химической, пищевой и фармацевтической промышленности.

Вибрационный дозатор MechaTron® состоит из дозирующего жёлоба с вибрационным приводом, дозирующего бункера, грузоприёмного бункера и опорной конструкции. При гравиметрическом дозировании дозатор дополняется двумя весовыми модулями.

Геометрия дозирующего бункера вибрационного дозатора MechaTron® обеспечивает бесперебойную подачу материала в дозирующий жёлоб. В зависимости от производительности и области применения предлагаются грузоприёмные бункеры различного размера.



Рис. 8. Мехатронная система дозирования на основе вибрационного дозатора (разработчик фирма «SchенckProcess», Германия)

Весовые модули гравиметрического дозатора состоят из прецизионных весовых тензометрических датчиков в герметичной оболочке, со встроенной защитой от перегрузки, отрыва и кручения.

Электроника обработки данных и регулирования встроена в механику, но может быть установлена и отдельно.

Вибрационные бороны (рис. 9) содержат пружинные зубья. В процессе выполнения технологического процесса они совершают самовозбуждающиеся колебания (автоколебания), обусловленные зависимостью сопротивления почвы от скорости рабочего органа.

Бороны пружинные предназначены для уничтожения сорной растительности, создания аэрационного режима в поверхностном слое почвы и разрушения почвенной корки. Бороны могут использоваться для довсходового и послевсходового боронования технических и зерновых культур, а также для выравнивания поверхности поля.

Борона с пружинными зубьями обеспечивает качественные показатели обработки почвы. Это не только защита зубьев и конструкции от перегрузок, но и вибрационное воздействие рабочих органов бороны на почву. Вследствие того, что зубья бороны в процессе работы подвергаются вибрации, почва лучше вспушивается и разрыхляется, эффективнее уничтожаются сорняки, не забивая зубья бороны.



Рис. 9. Вибрационная борона

Современные **доильные аппараты** (рис. 10) работают по принципу прерывистого отсоса молока вакуумом. Доильный аппарат содержит пульсатор (на рисунке укреплен на крышке ведра) – автоколебательное устройство, преобразующее

постоянный вакуум в переменный. Последний подается в доильные стаканы, заставляя сосковую резину колебаться 60-90 раз в минуту. Под действием этих колебаний формируются такты сжатия и сосания, и таким образом осуществляется безопасное для здоровья коровы прерывистое доение.



Рис. 10. Доильный аппарат в работе

Представленные вибрационные машины и устройства составляют лишь маленькую толику от большого сообщества машин этого типа. Приведены для первого знакомства читателя с ними.

Несколько последних десятилетий динамика машин и вибрационные процессы в технике отнесены к числу приоритетных направлений развития российской науки.

Согласно **программе фундаментальных научных исследований РАН** на 2013-2020 годы предусматривается:

- развитие научных основ и принципов действия волновых машин и аппаратов, в том числе для пищевой промышленности, с использованием нелинейной волновой механики и пульсовых волн;

- исследование новых эффектов нелинейных колебаний и волн в течениях несмешивающихся жидкостей и сыпучих средах;

- повышение технологической и энергетической эффективности вибрационных машин и процессов за счет реализации устойчивых режимов резонансного возбуждения.

Таким образом, государство продолжает финансировать разработку вибрационных технологических машин, поскольку их роль в технологии, в том числе в комплексной механизации и автоматизации сельского хозяйства и перерабатывающей промышленности, весьма велика и перспективна.

Это обусловлено следующими достоинствами вибромашин:

- высокая технологическая эффективность;***
- незначительный износ рабочих поверхностей;***
- безредукторный привод, простое исполнение рабочих органов;***

- простота установки и регулировки параметров;***
- низкие эксплуатационные расходы;***
- герметичное проведение процессов;***
- возможность совмещения технологических операций;***
- возможность работы в автоматическом режиме.***

Однако, чтобы правильно проектировать и эксплуатировать вибрационную технику, необходимо четко представлять физическую природу действия вибраций на сельскохозяйственные материалы, а также динамические основы функционирования вибрационных машин.

Систематическому изложению этих вопросов и посвящено данное издание.

1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРАЦИОННЫХ МАШИН

1.1. Элементы прикладной теории колебаний и динамики машин

1.1.1. Кинематика колебательных процессов

Колебания – это повторяющиеся во времени изменения состояния системы. Понятие колебаний охватывает очень широкий круг явлений.

Колебания механических систем, или *механические колебания*, – это механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия.

Амплитуда колебаний A тела – это величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.

Период колебаний T – это время одного колебания. За период тело проходит путь в четыре амплитуды.

Частота колебаний ν – это величина, обратная периоду: $\nu = 1 / T$. Частота измеряется в герцах ($\Gamma\zeta$) и показывает, сколько полных колебаний совершается за одну секунду.

Будем считать, что положение колеблющегося тела определяется одной единственной координатой x . Положению равновесия отвечает значение $x=0$. Основная задача механики в данном случае состоит в нахождении функции $x(t)$, определяющей координату тела в любой момент времени.

Для математического описания колебаний естественно использовать периодические функции: синус или косинус.

Поскольку функции синус и косинус получаются друг из друга сдвигом аргумента на $\pi/2$, можно ограничиться только одной из них. Мы для определенности будем использовать синус.

Гармонические колебания – это колебания, при которых координата изменяется во времени по *гармоническому закону* (рис. 11):

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

Выясним смысл входящих в эту формулу величин.

Положительная величина A является наибольшим по модулю значением координаты (так как максимальное значение модуля синуса равно единице), т.е. наибольшим отклонением от положения равновесия, поэтому A – амплитуда колебаний.

Аргумент $\psi = \omega t + \phi$ называется фазой колебаний. Величина ϕ , равная значению фазы при $t = 0$, называется *начальной фазой*. Начальная фаза отвечает начальной координате тела:

$$x_0 = A \sin \phi.$$

Величина ω называется угловой частотой. Найдем ее связь с периодом колебаний T и частотой ν . Одному полному колебанию отвечает приращение фазы, равное 2π радиан: $\omega T = 2\pi$, откуда

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Измеряется угловая частота в рад/с (радиан в секунду), часто используется запись c^{-1} .

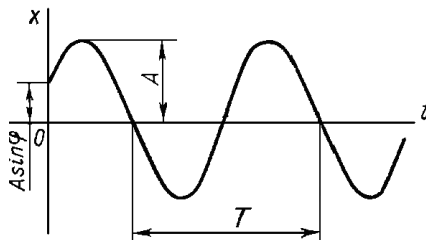


Рис. 11. График гармонического колебания

При гармонических колебаниях скорость и ускорение изменяются также по гармоническому закону:

$$dx / dt = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi); \quad (2)$$

$$d^2x / dt^2 = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (3)$$

Амплитуда скорости составляет $A\omega$, амплитуда ускорения $A\omega^2$.

В вибрационных машинах с нелинейными элементами возможно существование негармонических (ангармонических) колебаний (рис. 12).

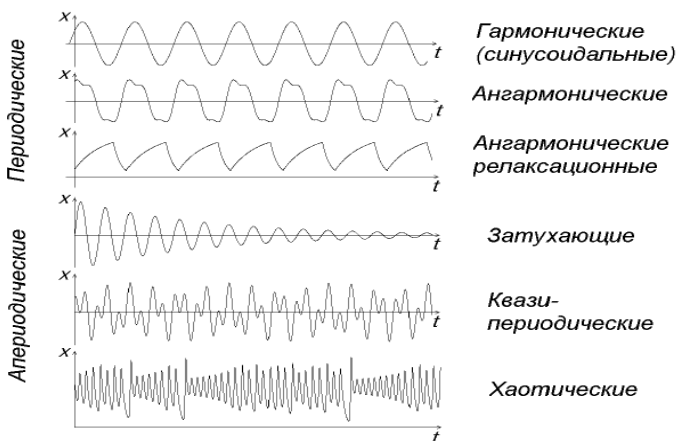


Рис. 12. Сравнение гармонических и негармонических колебаний

Под вибрацией понимают механические колебания с периодом, значительно меньшим характерного промежутка времени, на котором рассматривается движение системы, и с амплитудой колебаний, значительно меньшей характерных размеров системы [18]. По-иному, вибрация – это механические колебания с высокой частотой и малой амплитудой.

Представление о значениях амплитуд и частот вибраций, используемых в различных технологических процессах, дает рисунок 13 [157].

Как видно, в большинстве случаев амплитуда A не превышает 10 мм, угловая частота ω – 300 рад/с.

Обнаруживается также корреляционная связь между оптимальными параметрами вибраций, даваемая приближенной формулой [157]:

$$A = \frac{0,39}{\omega}, \quad (4)$$

в которой размерности: $[A] = м$, $[\omega] = рад / с$.

Формула Р.Б. Яруллина (4) позволяет прогнозировать значение одного из параметров вибраций, если каким-либо образом определен другой.

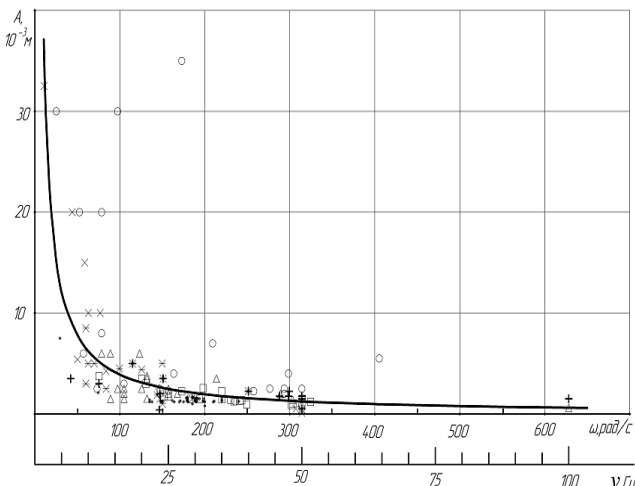


Рис. 13. Оптимальные значения амплитуды и частоты колебаний (по Р.Б. Яруллину): OOO – растениеводство и мелиорация; $\Delta\Delta\Delta$ – животноводство; * – строительство и дорожное дело; +++ – ремонт техники

1.1.2. Действующие силы при колебаниях

Действующие в вибрационных машинах силы весьма разнообразны. Можно выделить несколько групп этих сил.

Во-первых, это вынуждающие силы. Они или специально генерируются с помощью различных вибровозбудителей (**вынужденные колебания**), или возбуждаются самой механической системой (**автоколебания**) при поступлении энергии от неколебательно-го источника. Возможно также возбуждение колебаний (вибраций) системы изменением во времени одного или нескольких ее параметров (массы, момента инерции, коэффициента жесткости, коэффициента сопротивления) – **параметрические колебания**.

Наибольшее значение имеют вынуждающие силы вида

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t, \quad (5)$$

где Φ_0 – амплитуда вынуждающей силы.

Во-вторых, в механических системах с упругими связями (чаще всего пружинами) возникают **восстанавливающие силы** вследствие деформирования этих связей. Зачастую обрабаты-

емый машиной материал также обладает упругими свойствами и выступает в качестве источника восстанавливающих сил.

Восстанавливающая сила или момент возникают при отклонении системы от состояния равновесия и направлены противоположно этому отклонению, т.е. стремятся вернуть систему в положение равновесия. Поэтому в качестве восстанавливающих сил могут выступать также силы тяжести и другие силы.

Большое практическое значение имеет случай, когда восстанавливающие силы пропорциональны отклонению системы от неподвижного центра ввиду малости этих отклонений

$$P = cx, \quad (6)$$

где c – коэффициент жесткости линейного упругого элемента.

Однако, даже при пружинах, закон деформирования которых следует линейному закону Гука, возможно нелинейная характеристика восстанавливающей силы (рис. 14, средний график).

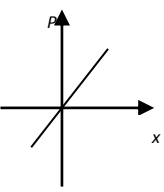
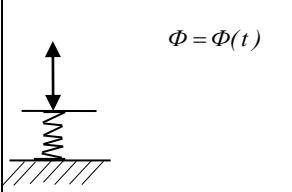
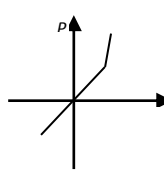
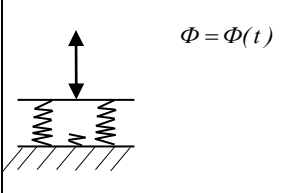
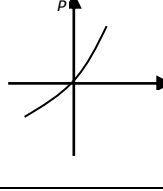
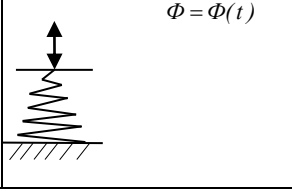
Тип восстанавливающей силы	Характеристика силы	Изображение пружинных элементов
Линейная (элемент Гука)		
Кусочно-линейная		
Нелинейная		

Рис. 14. Характеристики восстанавливающих сил

В-третьих, в вибрационных технологических машинах существенное значение имеют **силы сопротивления, или диссипативные силы**. Они препятствуют движению системы и обусловлены сопротивлением рабочей среды, а также сопротивлениям в узлах и механизмах самой машины.

В первом приближении силы сопротивления принимают пропорциональными скорости колебаний, т.е.

$$F = -b\dot{x}, \quad (7)$$

где b – коэффициент сопротивления.

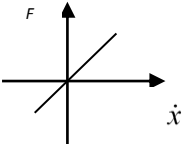

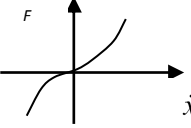
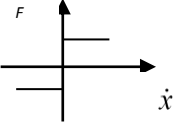
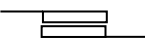
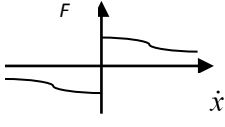
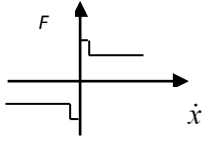
Тип трения	Характеристика трения	Условное обозначение элемента трения
Линейно-вязкое		 Элемент Ньютона
Нелинейно-вязкое		
Сухое		 Элемент Сен-Венана
		
		

Рис. 15. Характеристики трения и их условные обозначения

Это так называемое линейно-вязкое трение (рис. 15, верхний график). На этом же рисунке приведены другие виды сопротивления и их условные обозначения.

Заметим, что разнообразие физико-механических свойств сельскохозяйственного сырья не ограничивается характеристиками, представленными на рисунке 15.

1.1.3. Методы получения уравнений колебаний

Вывод уравнений движения рабочих органов, учет при этом их взаимодействия с обрабатываемой средой, представляет трудный и важный этап анализа динамических свойств машины, обуславливающих ее технологическую эффективность.

На практике применяют три метода, известных из курса теоретической механики:

1. Метод равновесия с использованием принципа Даламбера (квазистатический метод).

2. Принцип возможных перемещений Гамильтона, приводящий к уравнениям Лагранжа II рода.

3. Метод канонических уравнений Гамильтона.

Для простых динамических систем чаще всего применяют **принцип Даламбера**. В этом случае для составления уравнений движения рассматривают равновесие системы с приложенными к ней силами инерции.

Для линейных сил упругости и сопротивления при гармонической вынуждающей силе уравнение колебаний в форме Даламбера будет иметь вид

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx - \Phi_0 \sin \omega t = 0. \quad (8)$$

Наиболее общим и универсальным методом является **применение уравнения Лагранжа II рода**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (9)$$

где T , U – кинетическая и потенциальная энергия системы;

q_s – обобщенные координаты системы;

Q_s – обобщенные силы, которые могут зависеть от координат, скоростей и времени (например, вынуждающие силы).

Достоинство этого метода заключается в том, что он оперирует не векторными, а скалярными величинами, а также то, что в уравнения Лагранжа не входят явно реакции связей.

В наиболее сложных случаях приходится прибегать именно к этому методу.

Известен еще один метод составления уравнений движения – **в форме канонических уравнений Гамильтона**. Причем составляются два вида уравнений, один из них дает изменение обобщенных импульсов p_s различных тел, второй – положение q_s этих тел:

$$\dot{p}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} + Q_s; \quad \dot{q}_s = -\frac{\partial H}{\partial p_s}; \quad (s = 1, 2, \dots, 2k), \quad (10)$$

где H – функция Гамильтона (для установившегося (стационарного) движения является полной энергией системы).

По сравнению с уравнениями Лагранжа система Гамильтона имеет не второй, а первый порядок дифференциальных уравнений, поэтому для нее проще описать первые интегралы. Зато самих уравнений в два раза больше, чем в методе Лагранжа. Поэтому при малом количестве уравнений все же удобнее применять систему уравнений Лагранжа. К тому же при использовании канонических уравнений Гамильтона необходимо игнорировать диссипативные силы.

1.1.4. Основные этапы построения динамической модели вибрационного объекта

Под **вибрационным объектом** будем подразумевать вибромашину, вибрационное устройство или вибрационный технологический процесс.

Под **физической моделью** объекта следует понимать по возможности полное описание его функционирования в физически содержательных терминах.

Расчетная модель объекта описывает его функционирование в физически содержательных терминах, но в отличие от физической модели в ней не учитываются факторы, не оказывающие заметного влияния на ход процесса.

Под **математической моделью** объекта следует понимать уравнения и другие соотношения, вытекающие из расчетной модели, а также алгоритмы решения уравнений.

Динамический расчет состоит из ряда этапов [35].

Первый этап динамического расчета связан с разумным упрощением объекта, т.е. его подменой некоторой схемой, т.е. расчетной моделью, в которой стремятся отобразить наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи. Говоря об адекватности расчетной модели, следует иметь в виду, что речь не идет о полном воспроизведении свойств объекта, а лишь о ее способности дать правильное качественное и количественное (в рамках разумной точности) описание объекта при заданных воздействиях и относительно определенных характеристик. Одному и тому же объекту может соответствовать много моделей, каждая из которых остается ограниченной.

Второй этап состоит в математическом описании расчетной модели, т.е. построении математической модели. При ее составлении используются законы механики и экспериментальные данные. Иногда при этом приходится также привлекать на помощь некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упрощения дальнейшего анализа.

Третьим этапом является решение уравнений с помощью аналитических или численных методов.

Четвертым этапом является анализ полученных решений с позиций поставленной задачи. На базе анализа нередко удается сформулировать оптимизационную задачу. Применительно к колебательным системам машин решение этой задачи позволяет осуществить динамический синтез с целью более эффективного использования колебаний в технологическом процессе.

При составлении расчетной схемы сложная колебательная система с бесконечным числом степеней свободы обычно отображается динамической моделью с конечным числом степеней свободы.

Такая идеализация, позволяющая отбросить несущественные факторы задачи и создать предпосылки для инженерного расчета, базируется на допущении, согласно которому все инерционные свойства системы в виде приведенных масс или приведенных моментов инерции сосредоточиваются в отдельных телах, соединенных между собой безинерционными связями, имеющими упругие и демпфирующие свойства. Очевидно, что чем больше таких тел, тем меньшую погрешность можно ожидать при решении задачи. При этом следует иметь в виду, что это утверждение справедливо

лишь при условии достоверности первичного материала, на базе которого строится динамическая модель. Последняя оговорка особенно существенна для нелинейных моделей, усложнение которых, не подкрепленное достаточной точностью исходных данных, может привести лишь к кажущемуся уточнению, но в то же время создает весьма ощутимые расчетные трудности.

Основным условием приведения вибрационной машины к расчетной схеме является сохранение в динамической модели баланса кинетической и потенциальной энергии исследуемой системы, а также сохранение неизменного значения мгновенных мощностей, развиваемых внешними силами.

Изложенное однозначно связано с выбором числа степеней свободы в расчетной модели.

Числом степеней свободы механической колебательной системы называют число независимых величин (обобщенных координат), однозначно определяющих положение всех материальных тел системы в любой момент времени. Хотя для реальных механических систем это число всегда бесконечно велико, но в ряде случаев практически достаточен учет конечного числа существенных степеней свободы. При схематизации системы наиболее легкие элементы полагают вовсе лишенными массы, сравнительно жесткие части машины считают совершенно недеформируемыми, а отдельные малые тела системы представляют в виде материальных точек. Иногда число степеней свободы ограничивают путем задания некоторых заранее формулируемых предположений о конфигурации системы при колебаниях.

Наиболее простой (хотя не всегда достаточно точной) является схематизация механической системы в виде системы с одной степенью свободы.

Непрерывно деформируемые системы с распределенной массой (системы с распределенными параметрами) обладают бесконечным числом степеней свободы, так как в каждый момент времени конфигурация любой системы определяется не конечным числом параметров, а функциями пространственных координат.

Рассмотрим несколько примеров образования расчетных и математических моделей вибрационных технологических машин. На рисунке 16 показаны две уплотняющие машины: виб-

ротрамбовщик силоса (рис. 16а) и уплотнитель сыпучего материала, например, травяной муки в контейнере (рис. 16б). Они снабжены вибровозбудителями направленных колебаний.

Простейшей расчетной моделью обеих уплотняющих машин может быть одномассная система (с одной степенью свободы), включающая массу M (масса плиты, контейнера с присоединенной массой), упругий и вязкий элемент (уравнение (8) и рис. 16в). Упругий и вязкий элементы считаем лишенными массы. Первый элемент представляет линейная пружина с коэффициентом жесткости c , второй – демпфер с коэффициентом сопротивления b . Движение тела осуществляется в идеальных направляющих.

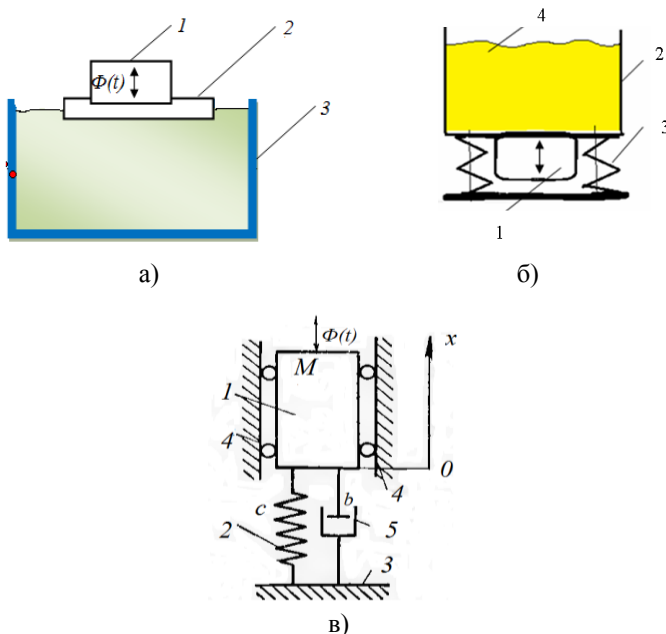


Рис. 16. Схемы вибрационных машин (а, б) и их расчетная модель (в):
 а) трамбовщик силоса: 1 – вибровозбудитель; 2 – виброплита;
 3 – стенки силосной ямы; б) уплотнитель сыпучего материала:
 1 – вибровозбудитель; 2 – контейнер; 3 – поддерживающие пружины;
 4 – уплотняемый материал; в) расчетная схема: 1 – рабочий орган;
 2 – упругий элемент; 3 – основание; 4 – направляющие; 5 – вязкий элемент

Присоединенная масса обусловлена колебаниями рабочей среды. Принимается обычно из расчета 0,25-0,50 массы уплотняемого материала.

При уплотнении силоса по указанной динамической схеме упругий элемент расчетной схемы моделирует упругие свойства уплотняемого материала, в устройстве для уплотнения травяной муки – упругость поддерживающих пружин. Вязкий элемент в обоих случаях моделирует диссипативные свойства уплотняемого материала.

В обоих примерах рабочая среда испытывает только вертикальные нагрузки.

Математическую модель вынужденных колебаний для этих примеров можно записать в форме Даламбера:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx - \Phi_0 \sin \omega t = 0. \quad (11)$$

Модель (11) отображает колебания рабочего органа относительно статического положения равновесия, при этом сила тяжести исключается из баланса действующих сил.

Еще один пример. Для стряхивания плодов с дерева применяют вибровозбудители кривошипно-шатунного типа (рис. 17а), приводимые в движение от трактора. Таким образом, налицо система, состоящая из трактора с вибровозбудителем и дерева. При взаимодействии элементов этой системы заданная амплитуда колебаний частично передается дереву, частично трактору. Принята следующая расчетная система (рис. 17б): трактор массой m_1 , стоящий на колесах с шинами, обладающими в горизонтальном направлении коэффициентом жесткости c_1 ; дерево с приведенной к месту обхвата массой m_2 , обладающее коэффициентом жесткости c_2 . На тракторе укреплен вибровозбудитель, колеблющийся горизонтально расположенную штангу по закону

$$x = r \cos \omega t.$$

На конце штанги закреплен захват дерева с упругой прокладкой жесткостью c .

Математическая модель этой двухмассной системы получена с помощью уравнений Лангранжа II рода и имеет вид [26]:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c)x_1 - cx_2 &= -cr(1 - \cos \omega t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c)x_2 - cx_1 &= -cr(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (12)$$

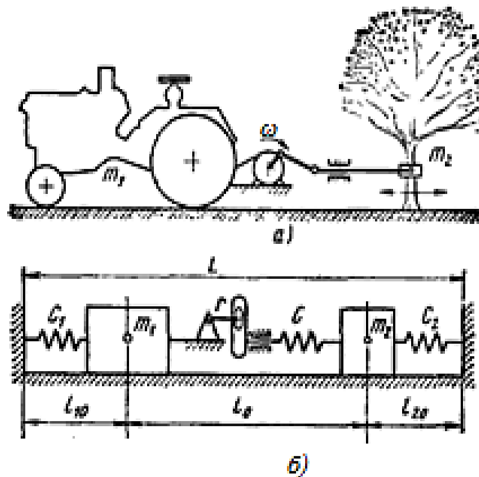


Рис. 17. Физическая модель (а) и расчетная схема (б) системы для вибрационной уборки плодов (по Г.П. Варламову [26])

Модель имеет две степени свободы, обусловленные движением масс m_1 и m_2 .

Решение этой системы дает закон движения (колебаний) дерева и прогнозирование эффективности вибрационной уборки плодов.

1.1.5. Классификация вибрационных машин по особенностям динамической схемы и привода

Обычно вибрационные технологические машины классифицируют по следующим признакам:

по типу привода: электрические, гидравлические, пневматические, внутреннего сгорания;

по типу преобразования подводимой энергии в энергию механических колебаний рабочего органа: центробежные, поршневые, кулачковые, кривошипно-шатунные, электромагнитные, электродинамические, пульсационные, возбуждаемые кинематически, автоколебательные и т.д.;

по числу колеблющихся твердых тел: одномассные, двухмассные, трехмассные и т.д.;

по форме колебаний рабочего органа: с прямолинейно направленными колебаниями, угловыми колебаниями, эллиптическими колебаниями, винтовыми колебаниями, различными комбинированными колебаниями и т.д.;

по периодичности колебаний: с простыми периодическими колебаниями, модулированными колебаниями, почти периодическими колебаниями, непериодическими (хаотическими, случайными) колебаниями;

по спектральному составу периодических колебаний рабочего органа: с синусоидальными колебаниями, бигармоническими колебаниями, полигармоническими колебаниями;

по наличию ударов: вибрационные безударные, ударно-вибрационные;

по отношению вынуждающей и собственных частот: до-резонансные, зарезонансные, резонансные, околорезонансные, межрезонансные;

по количеству вибровозбудителей: с одним вибровозбудителем, двумя и т.д.;

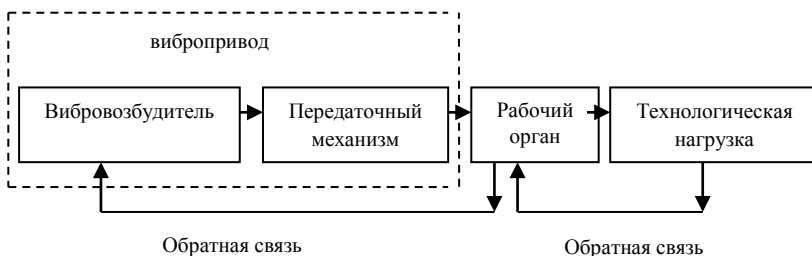
по способу синхронизации работы вибровозбудителей: с принудительной механической синхронизацией, принудительной электрической синхронизацией, самосинхронизацией, без синхронизации;

по диапазону частот: высокочастотные, среднечастотные, низкочастотные. Это понятия условны и зависят от вида техно-логического процесса и типа вибромашины;

по методу регулирования: нерегулируемые, с ручным регулированием, механическим регулированием, автоматическим регулированием, программным управлением, самонастройкой на оптимальный режим;

по степени определенности кинематических параметров рабочего органа: с полностью принудительным движением рабочего органа (с принудительной кинематикой), частично принудительным движением рабочего органа (с частично принудительной кинематикой), без принуждающих жестких связей рабочего органа (динамические).

В самом общем виде структурную схему технологической вибрационной машины можно представить в виде системы взаимодействующих между собой элементов (рис. 18).



*Рис. 18. Структурная схема технологической вибромашины
(по Пановко Г.Я. [96])*

Механические колебания, генерируемые вибровозбудителем, через передаточный механизм передаются на рабочий орган машины, который проводит вибрационную обработку технологической среды. Передаточный механизм осуществляет кинематическую связь (подвижную, жесткую или упругодемпфирующую), а также преобразование одних видов движения в другие (например, прямолинейные колебания преобразуются в угловые). В зависимости от вида технологического процесса, конструкции вибромашины передаточный механизм может отсутствовать, т.е. вибровозбудитель закрепляется непосредственно на рабочем органе.

В процессе работы вибромашины вследствие изменения параметров технологической нагрузки (массы, физико-механических свойств и т.п.) и параметров внешнего источника энергии могут изменяться параметры вибраций рабочего органа. Для их стабилизации в систему управления машиной часто вводят элементы обратной связи. Особенно важны такие элементы для резонансных вибрационных машин, работающих в узком диапазоне частоты, близкой к собственной частоте колебаний. При отсутствии обратной связи такие машины при изменении технологической нагрузки выходят из режима резонанса, амплитуда колебаний рабочего органа резко падает, технологический процесс нарушается.

1.2. Колебания линейных систем вибромашин с одной степенью свободы

1.2.1. Закономерности колебаний рабочего органа

Исследуем расчетную схему, представленную на рисунке 176. Запишем еще раз уравнение колебаний, но теперь в полном виде:

$$M\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 - G = \Phi_0 \sin \omega t, \quad (13)$$

где G – сила тяжести вибрирующего тела M .

Сила тяжести не зависит от x_1 . Её можно исключить преобразованием координат: $x_1 = x + x_0$; $\dot{x}_1 = \dot{x}$; $\ddot{x}_1 = \ddot{x}$,

где $x_0 = G/c = Mg/c$ – осадка пружины модели под действием силы тяжести.

Следовательно, уравнение колебаний можем записать в прежнем виде (11):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b\dot{x} + c(x + x_0) - G &= \Phi_0 \sin \omega t; \\ M\ddot{x} + b\dot{x} + cx &= \Phi_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (14)$$

Разделив обе части последнего выражения на M , получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = (\Phi_0 / M) \sin \omega t, \quad (15)$$

где $2n = b / M$;

$\omega_0 = \sqrt{c / M}$ – собственная частота колебаний системы.

Из математического анализа известно, что решение уравнений такого вида представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (с нулевой правой частью) и частного решения неоднородного уравнения, т.е. $x = X_1 + X_2$.

Для характерных режимов работы вибрационных машин с $\omega > \omega_0$ имеем:

$$X_1 = e^{-nt} (C_1 \sin \omega_* t + C_2 \cos \omega_* t), \quad (16)$$

где $\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$ – частота затухающих колебаний системы.

В связи с наличием множителя e^{-nt} констатируем, что эта составляющая колебаний быстро затухает и в процессе дальнейшей работы вибромашины становится несущественной.

В дальнейшем доминирует частное решение, которое представим в виде:

$$X_1 = A \sin(\omega t - \phi),$$

где A – амплитуда;

ϕ – фаза отставания перемещения от фазы вынуждающей силы.

После переходного процесса, связанного с пуском вибромашины, имеем право записать

$$x = A \sin(\omega t - \phi). \quad (17)$$

Параметры A и ϕ находят, подставляя (17) в исходное уравнение (15):

$$A = \frac{\Phi_0 / M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (19)$$

Решение (17) определяет собой **установившиеся вынужденные колебания** рабочего органа.

Установление стационарного колебательного процесса для условий ($n = 2$; $\omega_0 = 30$; $\omega = 50$) иллюстрирует рисунок 19. Видно, что переходной процесс заканчивается относительно быстро, после чего устанавливаются гармонические стационарные колебания.

На основании решения (17)-(19) можно сформулировать **основные свойства установившихся вынужденных колебаний:**

- это незатухающие колебания; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- эти колебания не зависят от начальных условий;
- при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы, а не с собственной частотой системы;
- эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину ϕ , изменяющуюся, как будет показано ниже, от 0 до π .

Амплитуда A установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе φ зависят от соотношения между частотами ω и ω_0 , а также коэффициента затухания n . Проанализируем эти зависимости, называемые **амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками**.

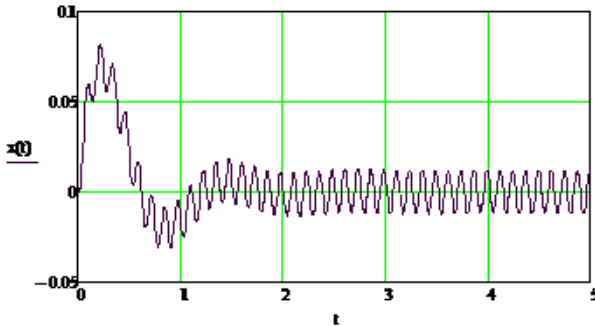


Рис. 19. Компьютерное моделирование процесса установления стационарных колебаний

Для получения обобщенных результатов вводят понятие **равновесной амплитуды** $A_0 = \Phi_0/c$, как статическую деформацию упругой связи под действием амплитудного значения вынуждающей силы Φ_0 .

Отношение A к A_0 называется коэффициентом динамического усиления β (коэффициентом динамичности):

$$\beta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + 4n^2 \omega^2 / \omega_0^4}}. \quad (20)$$

Из анализа этой зависимости следует, что при приближении вынуждающей частоты к ω_0 коэффициент динамичности возрастает (рис. 20). Максимум амплитуды вынужденных колебаний достигается приблизительно при $\omega / \omega_0 = 1$, при этом

$$\beta_{\max} \approx \frac{1}{n\omega / \omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{n}. \quad (21)$$

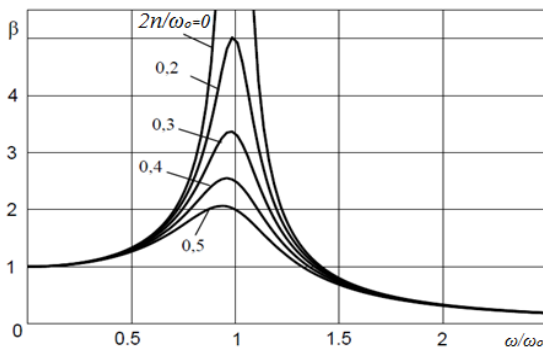


Рис. 20. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний

Колебания с максимальной амплитудой называются резонансными, а само явление «раскачки» колебаний до максимальной амплитуды при $\omega \approx \omega_0$ – **резонансом**. Частота ω_0 в этом случае называется резонансной. При отклонении частоты внешней силы от резонансной амплитуда резко уменьшается.

Из формулы (19а) для резонанса получим:

$$A_{рез} \approx \frac{\Phi_0}{M} \cdot \frac{1}{2n\omega_0}. \quad (22)$$

Физический смысл этого результата заключается в следующем. Член, связанный с ускорением, равен члену, обусловленному упругой силой, т.е.

$$\ddot{x} = \omega^2 x = \omega_0^2 x. \quad (23)$$

Это означает, что ускорение тела создается силой упругости, а внешняя сила и сила трения взаимно компенсируются.

Действительно, на основе этих утверждений из уравнения (15) имеем:

$$2n\dot{x} = (\Phi_0 / M) \sin \omega_0 t. \quad (24)$$

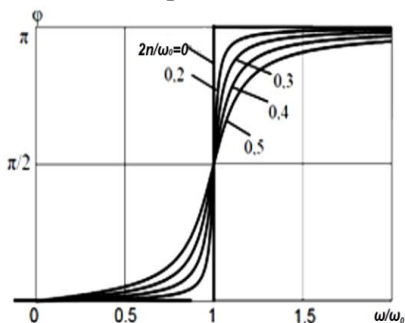
Его решение имеет вид

$$x = \frac{\Phi_0}{M} \cdot \frac{1}{2n\omega_0} \cos \omega_0 t, \quad (25)$$

и, следовательно, амплитуда этого колебания совпадает с приведенным выше (22).

Таким образом, резонансные колебания весьма похожи на свободные: происходят с частотой ω_0 , а роль вибровозбудителя состоит лишь в нейтрализации сил трения.

Резонанс – основное явление, возникающее в линейных колебательных системах. Если в процессах полезного использования его пытаются «приручить» (и пока не совсем успешно), то в машинах других типов и различных сооружениях и конструкциях от него пытаются избавиться. Разрушения мостов, зданий, аварии различных машин в большинстве случаев обусловлены возникновением резонанса, опасность которого не учли конструкторы. Эти негативные примеры огромной разрушительной силы резонанса – дополнительный довод его полезного использования в вибрационных машинах.



Обратимся теперь к фазо-частотной характеристике вынужденных колебаний (рис. 21).

Рис. 21. Фазо-частотная характеристика вынужденных колебаний

Эта характеристика выражает разность фаз вынужденных колебаний тела M и вынуждающей силы. Смещение запаздывает по фазе относительно внешней силы.

При очень малых частотах $\omega \ll \omega_0$ разность фаз φ мала, при резонансе равна $\pi/2$, а в случаях $\omega \gg \omega_0$ (далеко зарезонансный режим) приближается к π . В последнем случае смещение и сила направлены почти противоположно, поскольку $\sin(\omega t - \pi) = -\sin \omega t$. Поэтому, когда сила Φ направлена в одном направлении, перемещение рабочего органа (инерционного элемента M) происходит в противоположную сторону. Казалось бы, это противоречит здравому смыслу, но вспомним простейший гравитационный маятник. Когда он проходит низшую точку, то составляющая сила тяжести также действует противоположно его движению.

Возвратимся к явлению резонанса, где сила опережает смещение на $\pi/2$. Если проанализировать другие кинематиче-

ские компоненты движения, то окажется, что скорость при резонансе колеблется в одной фазе с силой, т.е. сила всё время совпадает по направлению со скоростью. Поэтому работа внешней силы Φ достигает минимального значения именно при резонансе. Вне резонанса сила и скорость совпадают по направлению лишь часть времени периода, поэтому передаваемая энергия и амплитуда колебаний уменьшаются.

1.2.2. Энергетические соотношения в вибрационной машине

Вернемся ещё раз к уравнению (14). Умножим его правую и левую части на \dot{x} :

$$(M\ddot{x} + b\dot{x} + cx)\dot{x} = \Phi_0 \sin \omega t \cdot \dot{x}. \quad (26)$$

Очевидно, что правая часть исходного выражения представляет собой *мгновенное (текущее) значение мощности $N(t)$* , развиваемой вибровозбудителем.

Поскольку $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \phi)$, то имеем:

$$N = \Phi_0 A\omega \cdot \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (27)$$

Или после преобразований:

$$N = 0,5\Phi_0 A\omega \sin \phi + 0,5\Phi_0 A\omega \sin(2\omega t - \phi). \quad (28)$$

Среднее значение мощности найдем, проинтегрировав $N(t)$ за период колебаний и разделив полученное выражение на T , т.е.

$$N_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt.$$

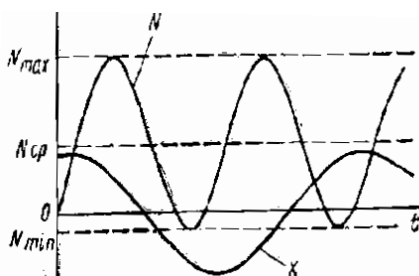
В силу постоянства первого слагаемого и периодичности второго получим: $N_{cp} = 0,5\Phi_0 A\omega \sin \phi$. (29)

Следовательно, текущее значение мощности можно записать и так $N = N_{cp} + 0,5\Phi_0 A\omega \sin(2\omega t - \phi)$. (30)

Таким образом, текущее значение мощности, развиваемой источником вибрации, представляет собой синусоидальную функцию времени, колеблющуюся около среднего значения с частотой, в два раза превышающей частоту колебаний координаты x , т.е. инерционного элемента (рис. 22).

Поскольку амплитуда колеблющейся составляющей $0,5\Phi_0 A\omega$ больше постоянной составляющей $N_{cp} = 0,5\Phi_0 A\omega \sin\varphi$ (29) и (30), то мгновенная мощность четыре раза изменяет свой знак за период колебаний инерционного элемента (рис. 22). Дважды за период колебаний координаты x мощность положительна, течет из ее источника в колеблющуюся систему. И еще дважды эта мощность отрицательна, т.е. течет обратно из колеблющейся системы в источник энергии.

Рис. 22. Совмещенный график колебаний системы $x = x(t)$ и мгновенного значения мощности $N = N(t)$



И только при резонансе, когда $\varphi = \pi/2$, кривая $N(t)$ не пересекает нулевую линию, поскольку в этом режиме $N_{cp} = 0,5\Phi_0 A\omega$, т.е. равняется амплитуде колеблющейся составляющей мощности. Это указывает на то, что при резонансе энергия постоянно положительна, течет только от источника в колеблющуюся систему, а обратных перетечек нет.

При резонансе перетечки энергии происходит лишь локально в самой колебательной системе (превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот).

Мы рассмотрели энергетические соотношения в колеблющейся системе как результат действия вынуждающей силы. Рассмотрим теперь распределение энергетических потоков в самой колебательной системе, для чего обратимся к левой части выражения (26):

$$N(t) = (M\ddot{x} + b\dot{x} + cx)\dot{x}. \quad (31)$$

В ней можно выделить активную (диссипативную) составляющую мощности, обусловленную затратами энергии на вибрационную обработку рабочей среды

$$N_a = b\dot{x}\dot{x} = b\dot{x}^2 = bA^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \phi). \quad (32)$$

Поскольку косинус возводится в квадрат, то **активная мощность** всегда положительна, течет от источника энергии в обрабатываемую среду.

Для подсчета средней за период активной мощности N_{acr} нам потребуется среднее от квадрата косинуса:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t - \phi)] dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t - \phi) \right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

Учитывая также, что $b = \frac{\Phi_0 \sin \phi}{A\omega}$, окончательно получим

$$N_{acr} = 0,5\Phi_0 A\omega \sin \phi. \quad (33)$$

Сравнивая с выражением (29), имеем $N_{cp} = N_{acr}$.

Отсюда следует важный вывод: амплитуда и фаза стационарных колебаний устанавливаются такими, что средняя энергия, передаваемая внешней силой в единицу времени, в точности равняется средней энергии, теряемой в единицу времени из-за наличия трения (т.е. равна средней энергии, диссипируемой в рабочей среде).

Однако в правой части (31) можно выделить **еще реактивную мощность**, среднее значение которой за период колебаний, как следует из сказанного выше, равняется нулю:

$$N_p = (M\dot{x} + cx)\dot{x} = M\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M\dot{x}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{cx^2}{2} \right). \quad (34)$$

Таким образом, реактивная мощность определяется скоростями изменения кинетической ($M\dot{x}^2/2$) и потенциальной ($cx^2/2$) энергии. Реактивная мощность обусловлена циркуляцией энергии между инерционным и упругим элементами, превращением при колебаниях кинетической энергии в потенциальную и обратно. В выражении (30) колеблющаяся составляющая как раз и отражает действие реактивной мощности.

Реактивная мощность бесполезна для ведения технологического процесса, но всегда сопровождает процесс колебаний и в принципе нагружает вибропривод машины.

От реактивной мощности избавиться невозможно, ее долю можно только уменьшить. При работе машины в резонансном режиме реактивная мощность циркулирует локально внутри колебательной системы. Источник колебаний в этом случае не в

среднем, а в каждой момент времени восполняет лишь затраты энергии, связанные с обработкой рабочей среды. Поэтому резонансный режим машины считают самым экономичным.

К обсуждаемым проблемам близко примыкает вопрос о выборе мощности двигателя вибрационного привода.

В общем плане выбор мощности вибропривода проектируемой машины представляет сложнейшую задачу.

Во-первых, необходимо знание диссипативных характеристик обрабатываемого сырья, а такие данные практически отсутствуют¹.

Во-вторых, при малой мощности приводного двигателя возможно проявление эффекта Зоммерфельда, т.е. затруднения во время запуска привода при переходе через зону резонанса, что актуально для резонансных машин с дебалансным (инерционным) вибровозбудителем.

В-третьих, необходим учет инерционных характеристик всего привода, в том числе маховичных масс (например, ротора электродвигателя).

В связи с этими проблемами И.И. Быховский² рекомендует использовать показатель *максимума средней мощности, реализуемой вибровозбудителем* [23].

¹Некоторым исключением является работа [57], где приводятся методика измерения и данные по вибропоглощающим свойствам кормов и кормовых добавок. Ниже эти данные сгруппированы в таблицу и могут служить некоторым ориентиром при различных расчетах с использованием сдвига фаз ϕ .

Таблица. Сдвиг фаз ϕ между вынуждающей силой и перемещением границы образца кормового материала

Вид корма и микродобавок	Влажность, %	Степень уплотнения корма	ϕ , град (при $\omega/\omega_0=2,2$)
1. Комбикорм	9,41	1,25	130
2. Травяная мука	10,09	1,45	162
3. Соль	2,35	1,29	116
4. Мел	3,20	1,40	137
5. Фосфат кальция	7,93	1,32	142

² **Быховский Исидор Иделевич** (1914-1988), канд. техн. наук, научный сотрудник Всесоюзного НИИ строительного и дорожного машиностроения. В 1969 году издал книгу «Основы теории вибрационной техники» [23], ставшей настольной книгой для нескольких поколений исследователей и конструкторов вибрационной техники.

Для рассмотренной выше линейной системы с одной степенью свободы имеем

$$N_{cp} = 0,5\Phi_0 A \omega \sin \phi = \frac{\Phi_0^2 \omega \sin 2\phi}{4M(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (35)$$

Максимум этого выражения достигается при $\sin 2\phi = \pm 1$ (в зависимости от соотношений ω_0 и ω). При этом максимальная величина средней мощности вибровозбудителя составит

$$\max N_{cp} = \frac{\Phi_0^2 \omega}{4M|\omega_0^2 - \omega^2|}. \quad (36)$$

Показатель $\max N_{cp}$ является единственным надежным критерием выбора мощности электродвигателя вибровозбудителя.

Формула (36) оказывается достаточно точной для конструкторских расчетов даже при сильной нелинейности диссипативных сопротивлений, если вибрация близка к гармонической.

На основе формулы (36) можно объяснить «парадокс», поражающий воображение начинающих исследователей вибрационной техники: **мощность, потребляемая вибрационной машиной под нагрузкой, часто оказывается меньшей, чем на холостом ходу**. Дело в том, что при подаче в машину обрабатываемого или транспортируемого материала увеличивается величина M , а с ней и уменьшается ω_0 (при этом разность $(\omega_0^2 - \omega^2)$ увеличивается). Знаменатель выражения существенно возрастает, при этом N_{cp} снижается.

1.2.3. Особенности вынужденных колебаний при инерционном и кинематическом их возбуждении

Мы рассмотрели силовое возбуждение колебаний, когда $\Phi_0 = const$. Практически большое значение имеет случай, когда амплитуда вынуждающей силы пропорциональна квадрату частоты колебаний. С этим приходится иметь дело при инерционном (центробежном) возбуждении колебаний.

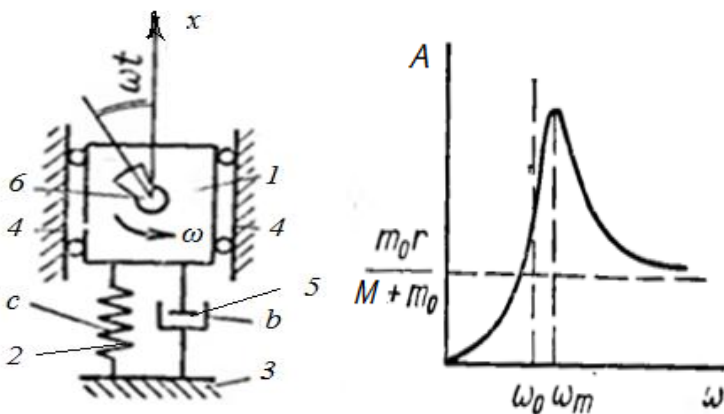


Рис. 23. Расчетная схема (а)
и амплитудно-частотная характеристика
вынужденных колебаний при $\Phi_0 = f(\omega)$

На рисунке 23 а изображена система, состоящая из тела 1 массы M (движение его ограничено идеальными направляющими 4), линейной пружин 2 жесткости c и линейного демпфера 5 с коэффициентом сопротивления b , соединяющих тело 1 с неподвижной стойкой 3. Колебания тела 1 возбуждаются вращением неуравновешенного ротора (дебаланса) б вокруг оси, жестко связанной с телом 1. Дебаланс б вращается с постоянной угловой скоростью ω , его масса m_0 , эксцентриситет массы (расстояние от оси вращения дебаланса до его центра тяжести) r . Вращение дебаланса порождает центробежную силу

$$\Phi_0 = m_0 r \omega^2, \quad (37)$$

проекция которой на вертикальную ось представляет собой вынуждающую силу

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t = m_0 r \omega^2 \sin \omega t. \quad (38)$$

Учитывая это, можно воспользоваться выкладками предыдущих разделов и формулами (18) и (19), но вместо массы M надо всюду подставлять суммарную массу системы $M + m_0$. Подставив в равенство (18) величину Φ_0 из формулы (37),

получим следующее выражение амплитуды вынужденных колебаний:

$$A = \frac{m_0 r \omega^2}{(M + m_0) \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}. \quad (39)$$

Исследовав это выражение на экстремум, находим, что амплитуда достигает максимума:

$$A_{max} = \frac{m_0 r \omega_0^2}{2(M + m_0) n \sqrt{\omega_0^2 - n^2}} \quad (40)$$

при резонансной частоте

$$\omega_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}} > \omega_0. \quad (41)$$

На рисунке 23 б представлена амплитудно-частотная кривая, построенная по зависимости (39).

Анализ ее показывает, что равновесную амплитуду A_0 нужно определять не при $\omega = 0$, как при силовом возбуждении с постоянной амплитудой Φ_0 вынуждающей силы, а при частоте, стремящейся к бесконечности.

Можно показать, что при силовом возбуждении с амплитудой возбуждающей силы, пропорциональной квадрату частоты, равновесная амплитуда определяется из выражения

$$A_0 = \frac{m_0 r}{M + m_0}. \quad (42)$$

Перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний при кинематическом возбуждении. На рисунке 24 представлен вариант такого возбуждения.

При этом рабочий орган массой M соединен с кривошипно-ползунным механизмом через посредство пружины с коэффициентом жесткости c . Вязкий элемент b моделирует сопротивление рабочей среды.

Ползун кривошипно-ползунного механизма совершает приблизительно гармонические колебания

$$x_1 = r \sin \omega t. \quad (43)$$

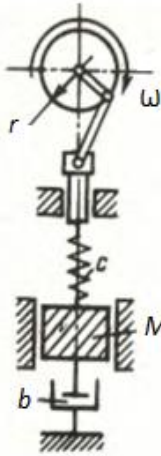


Рис. 24. Кинематическое возбуждение вынужденных колебаний

Обозначим смещение верхнего конца пружины, через x_1 , а массы – через x . Тогда сила, действующая на груз при движении верхнего конца пружины,

$$P = c(x_1 - x). \quad (44)$$

Дифференциальное уравнение движения массы имеет вид:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} - c(x_1 - x) = 0, \quad (45)$$

$$\text{или } M\ddot{x} + b\dot{x} - cx = cr \sin \omega t. \quad (46)$$

Разделив обе части последнего уравнения на M , получим обычное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = (\Phi_0 / M) \sin \omega t \quad (47)$$

$$\text{где } 2n = \frac{b}{M}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{M}; \quad \Phi_0 = cr; \quad (48)$$

Соответственно, все формулы и графики, приведенные в разделе 1.2.1, сохраняют свою силу.

Таким образом, при кинематическом возбуждении рабочего органа через пружину (возможно, и через вязкий элемент) получаем динамическую систему, обладающую всеми свойствами силового возбуждения с $\Phi_0 = const$, в том числе резонансными свойствами.

1.2.4. Почему большинство вибрационных машин работает в зарезонансном режиме

Мы видели, что в резонансных режимах при относительно низких уровнях возбуждения реализуются большие амплитуды колебаний рабочего органа вибромашины. Резонансная настройка позволяет в несколько раз снизить вынуждающую силу и минимум на 30-40% потребляемую мощность при одновременном

улучшении эксплуатационных качеств машины. Однако на производстве вибрационные машины работают чаще всего в резонансных режимах. Объясняется это двумя главными факторами.

Во-первых, резонансный режим очень нестабилен. При изменении массы технологической нагрузки машина легко выпадает из резонансного режима.

Вспомним, что собственная частота колебательной системы определяется формулой:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}}, \quad (49)$$

где M – это масса m_1 рабочего органа плюс масса m_2 обрабатываемого материала, находящегося в контакте с рабочим органом.

Иногда учитывается не вся масса технологической среды, а лишь ее часть, т.е. присоединенная масса.

Если масса обрабатываемого материала по каким-либо причинам изменяется, то изменяется M , а следом ω_0 . Частота вынужденных колебаний при этом остается прежней, или даже увеличивается в связи с уменьшением нагрузки (например, при использовании асинхронных электродвигателей для привода вибровозбудителей). При этом разность $(\omega - \omega_0)$ увеличивается, резонанс исчезает (рис. 20), амплитуда колебаний падает, технологический процесс нарушается.

Во-вторых, при резонансном режиме трудно предотвратить передачу вибрации от рабочего органа на узлы самой машины и поддерживающие конструкции (пол, фундамент, потолок, стены и т.д.).

Для доказательства вернемся еще раз к схеме (рис. 16в) и уравнению (14). Очевидно, что на фундамент передается динамическая сила, равная

$$Q = b\dot{x} + cx. \quad (50)$$

Подставляя сюда значения \dot{x} и x , получим:

$$Q = bA\omega \cos(\omega t - \phi) + cA \sin(\omega t - \phi). \quad (51)$$

Введем в последнее выражение значение A из (18) и после ряда геометрических преобразований получим:

$$Q = \beta_* \Phi_0 \sin[\omega t - (\phi - \varepsilon)], \quad (52)$$

где

$$\beta_* = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (53)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 2n\omega / \omega_0^2. \quad (54)$$

Величина β_* называется **коэффициентом виброизоляции**. Разность $(\varphi - \varepsilon)$ является сдвигом фаз между силой, действующей на основание, и вынуждающей силой.

Коэффициент виброизоляции β_* связан с ранее введенным коэффициентом динамичности β (20) формулой:

$$\beta_* = \beta \sqrt{1 + \frac{4n^2\omega^2}{\omega_0^4}}. \quad (55)$$

Построенные по формуле (53) кривые представлены на рисунке 25. Видно, что в области резонанса на поддерживающие конструкции передается сила, *многократно превышающая* силу, генерируемую вибровозбудителем. Это чревато обрушением потолочных поддерживающих конструкций (если машина крепится на подвесках), или интенсивными колебаниями фундаментов (если машина установлена на фундаменте). При этом на колебания поддерживающих конструкций также затрачивается энергия, которая «отсасывается» от двигателя вибровозбудителя. При этом в колебания может вовлекаться прилегающая к фундаменту часть грунта. В результате можем получить не снижение затрат энергии резонансной машины, а их повышение.

Кроме того, может возникнуть двухмассная колебательная система: одна масса – рабочий орган вибромашины, вторая – фундамент. В следующем параграфе увидим, что в такой системе масса, представляющая рабочий орган, и на которой укреплен вибровозбудитель, может почти прекратить колебания, а вторая масса (фундамент) – совершать интенсивные колебания. Результат – нарушение или прекращение технологического процесса, при этом затраты энергии повышаются.

О виброизоляции как таковой можно говорить лишь для режимов с $\omega / \omega_0 > \sqrt{2}$, поскольку в этом случае $\beta_* < 1$, и на

поддерживающие конструкции передается сила, меньшая, чем амплитуда вынуждающей силы. Вот почему конструкторы и практики предпочитают зарезонансный режим (обычно применяют $\omega/\omega_0 \approx 3-5$). К достоинствам зарезонансных режимов следует добавить слабую чувствительность машины к изменению технологической нагрузки.

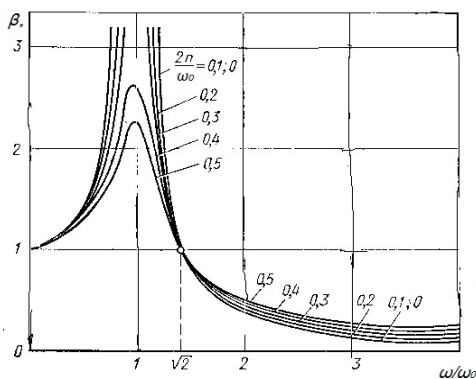


Рис. 25. Зависимость коэффициента виброизоляции β_ от отношения частот вибрации*

Таким образом, налицо проблемная ситуация: с одной стороны, резонансные вибрационные машины наиболее экономичны, с другой стороны, виброизоляция таких машин представляет огромные трудности. Решить эту проблему – важнейшая задача современной науки по прикладным колебаниям.

Зарезонансные машины тоже имеют недостаток, обусловленный резким увеличением амплитуд колебаний при прохождении зоны резонанса в процессе пуска и выбега вибровозбудителя. Резонансные раскочки сопровождаются сильным шумом, соударением витков пружин и вызывают значительные (хотя и кратковременные) динамические нагрузки на машину, поддерживающие конструкции и вибропривод. Однако эти проблемы успешно решаются использованием вибровозбудителей с автоматическим регулированием статических моментов дебалансов, применением двигателей с повышенным пусковым моментом или мощностью, торможением двигателей противовключением и т.п.

Возвращаясь к резонансным машинам, следует заметить, что сейчас задача удержания машины в резонансном режиме решается с помощью автоматических устройств, реализующих авторезонанс [7].

Авторезонанс – это резонанс под действием силы, порождаемой движением самой колебательной системы машины. При этом в системе возбуждаются периодические автоколебания за счет положительной обратной связи, формирующей силу возбуждения в зависимости от параметров колебаний рабочего органа. При определенном согласовании параметров колебательной системы и цепи положительной обратной связи авторезонансная система обеспечивает самовозбуждение колебаний и автоматическое поддержание резонансного состояния при изменении в широких пределах нагрузки, возникающей при выполнении технологического процесса.

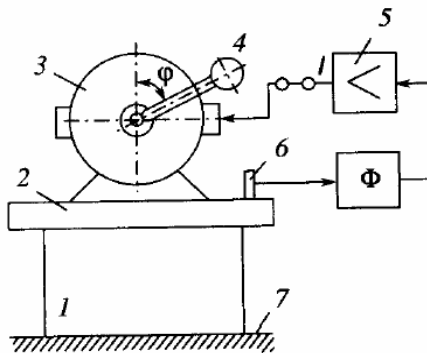


Рис. 26. Авторезонансная система

На рисунке 26 показана схема вибромашины с дебалансным возбудителем колебаний. Колебательная система машины содержит платформу 2, связанную плоскими пружинами 1 с неподвижным основанием 7. Колебания платформы возбуждаются дебалансным возбудителем 4, приводимым во вращение синхронным двигателем 3. Для питания двигателя переменным электрическим током специальным образом организована цепь обратной связи. Датчик обратной связи 6, регистрирующий колебания платформы 2, через фазосдвигающий элемент Φ связан

с входом усилителя 5, к выходу которого подключен синхронный двигатель возбудителя колебаний.

Сигнал с датчика с частотой колебаний платформы используется для формирования переменного напряжения питания двигателя с той же частотой с помощью фазосдвигающего элемента и усилителя.

Характеристика усилителя подобрана таким образом, чтобы получить на выходе номинальное напряжение питания двигателя. Частота колебаний в такой замкнутой системе зависит от определяемого фазосдвигающим элементом сдвига фаз между напряжением питания двигателя и сигналом с датчика обратной связи. Изменение фазы дает возможность регулирования частоты колебаний платформы и позволяет реализовать амплитудно-частотную характеристику колебательной системы при любой нагрузке.

Следует отметить важную особенность такого способа возбуждения колебаний. В отличие от вынужденных колебаний, где сдвиг фазы между силой возбуждения и движением рабочего органа зависит от заданной частоты, при автоколебаниях именно заданный фазовый сдвиг определяет частоту колебаний.

Если фазовый сдвиг в цепи обратной связи выбран так, что разность фаз между колебаниями платформы и создаваемой дебалансом силой возбуждения соответствует резонансной (т.е. $\pi / 2$), устройство обеспечит реализацию резонансных колебаний при любом изменении технологической нагрузки. Именно такая система возбуждения колебаний с резонансной настройкой фазы в цепи обратной связи и является авторезонансной. Отмеченная выше особенность делает авторезонансную систему устойчивой по отношению к существенным изменениям параметров машины и нелинейной технологической нагрузки.

Авторезонансное возбуждение позволяет иногда в несколько раз снизить мощность привода машины, существенно уменьшить ее металлоемкость и увеличить КПД. Естественной платой за очевидные достоинства авторезонансного возбуждения является усложнение вибрационной машины за счет введения системы автоматического управления и необходимости построения блока электрического питания привода машины.

1.3. Вынужденные колебания в системах со многими степенями свободы

1.3.1. Система с двумя степенями свободы без диссипации

С системой с двумя степенями свободы мы уже сталкивались в разделе 1.2. Здесь мы рассмотрим более простую модель без диссипации. На этой модели обсудим основные свойства систем со многими степенями свободы (рис. 27).

Будем рассматривать колебания масс m_1 и m_2 около положений статического равновесия, что позволяет исключить силы тяжести из уравнений движения.

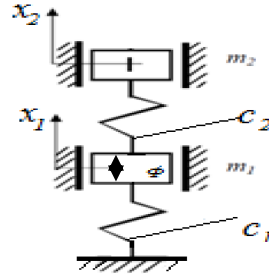


Рис. 27. Колебательная система с двумя степенями свободы (двухмассная система)

Вынуждающая сила $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$ действует на нижнюю массу. Обозначая жесткости пружин, соответственно, c_1 и c_2 , приходим к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + \Phi_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 (x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (56)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – перемещения масс.

Установившиеся колебания масс m_1 и m_2 являются гармоническими и происходят с частотой вынуждающей силы:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t; \quad x_2 = A_2 \sin \omega t. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56), получим два алгебраических уравнения относительно амплитуд колебаний

$$\begin{aligned} -A_1 m_1 \omega^2 + c_1 A_1 - c_2 (A_2 - A_1) &= \Phi_0; \\ -A_2 m_2 \omega^2 + c_2 (A_2 - A_1) &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

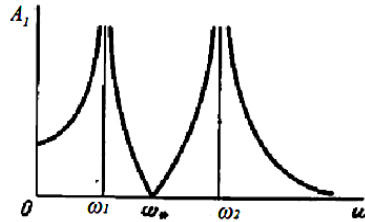
Решение приводит к следующему результату

$$A_1 = \frac{\Phi_0(c_2 - m_2\omega^2)}{\Delta}; \quad A_2 = \frac{\Phi_0 c_2}{\Delta}, \quad (59)$$

$$\text{где } \Delta = (c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2. \quad (60)$$

При определенных соотношениях параметров знаменатель Δ выражений (59) обращается в нуль, а величины A_1 и A_2 стремятся к бесконечности. График A_2 копирует A_1 и поднят на высоту $(\Phi_0 \cdot m_2\omega^2) / \Delta$. Здесь для примера приведен только график для A_1 (рис. 28).

Рис. 28. Амплитудно-частотная характеристика двухмассной системы



Резонансных значений частоты — два, их находят из условия $\Delta = 0$. (61)

Следовательно, в данной системе обнаруживаются *два резонанса*, соответствующих условиям

$$\omega = \omega_1 \quad \text{и} \quad \omega = \omega_2. \quad (62)$$

Однако самым удивительным свойством этой системы является *возникновение антирезонанса*, т.е. неподвижности массы m_1 , на которую в это время действует периодическая сила $\Phi(t)$. Этому явлению соответствует обращение в нуль числителя для выражения A_1 (59) и, соответственно, самой A_1 :

$$c_2 - m_2\omega^2 = 0. \quad (63)$$

Отсюда частота ω_* антирезонанса составит

$$\omega_* = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}. \quad (64)$$

В то время, когда на массу m_1 действует гармоническая сила, но она остается неподвижной ($A_1 = 0$), вторая масса вибрирует с амплитудой

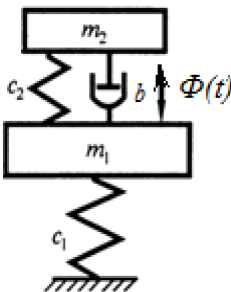
$$A_2 = \frac{\Phi_0}{c_2}. \quad (65)$$

Явление антирезонанса широко используется в технике для *гашения колебаний* в машинах с вращательными рабочими органами. В машинах такого типа вибрации появляются в связи с неуравновешенностью валов, роторов и т.д. и представляют собой опасность, с которой надо бороться. Поэтому присоединение к основной массе m_1 машины дополнительной массы m_2 (которая вместе с пружиной образует динамический гаситель колебаний) устраняет вибрации основной системы.

Однако частота, вызывающая вибрации, должна быть стабильной. Если это условие не выполняется, то динамический гаситель может причинить даже вред. Дело в том, что по обе стороны от частоты антирезонанса возникают резонансные явления (рис. 28), и при «плавании» частоты возбуждения могут возникнуть опасные раскачки системы. Без гасителя была бы опасна только одна частота колебаний.

1.3.2. Учет диссипации в системе с двумя степенями свободы

Явление антирезонанса наводит на мысль о его использовании в вибрационных технологических машинах. Машину в этом случае также надо выполнять двухмассной. В режиме антирезонанса рама машины с вибровозбудителем (m_1) остается неподвижной, а рабочий орган (m_2) совершает интенсивные колебания. В этом случае на фундамент колебания не передаются (поскольку пружина c_1 не колеблется), а рабочий орган вибрирует с достаточной амплитудой. Для рассмотрения реалистичности такого предложения необходимо учесть диссипацию энергии, обусловленную обработкой рабочей среды.



Для этого в предыдущую схему добавим демпфер, расположенный между массами m_1 и m_2 (рис. 29).

Рис. 29. Динамическая схема двухмассной вибрационной технологической машины

С учетом этого добавления дифференциальные уравнения движения масс m_1 и m_2 примут вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \Phi_0 \sin \omega t ; \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 (x_2 - x_1) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) . \end{aligned} \quad (66)$$

Решения для амплитуд колебаний будут таковыми:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi_0 \sqrt{\frac{(c_2 - m_2 \omega^2)^2 + b_2^2 \omega^2}{\Delta^2 + \Delta_1^2}} ; \\ A_2 &= \Phi_0 \sqrt{\frac{c_2^2 - b_2^2 \omega^2}{\Delta^2 + \Delta_1^2}} , \end{aligned} \quad (67)$$

где Δ по-прежнему определяется выражением (60), а Δ_1 определяется формулой

$$\Delta_1 = b_2 \omega (c_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2) . \quad (68)$$

Проанализируем сначала поведение массы m_1 (рамы машины с вибровозбудителем). Из первого выражения (67) следует, что числитель никогда не обращается в нуль. Это означает, что при диссипации амплитуда колебаний рамы не может быть равна 0, хотя и может принимать малые значения. Таким образом, в данной системе *антирезонанс в полной мере не проявляется* (рис. 30).

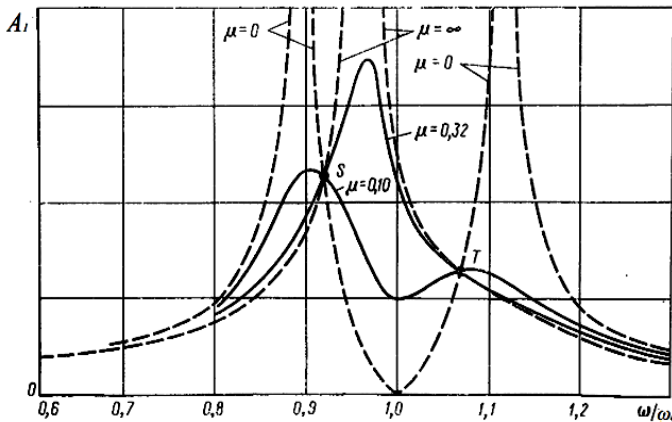


Рис. 30. Амплитудно-частотная характеристика двухмассной вибрационной машины с различной степенью диссипации

Следует отметить, что на рисунке 30 использована безразмерная величина затухания μ , равная

$$\mu = \frac{b_2}{2c_2m_2}. \quad (69)$$

Далее, при $\mu \rightarrow \infty$ система с двумя степенями свободы трансформируется в систему с одной степенью свободы, поскольку демпфер в этом случае превращается в недеформируемый стержень. При $\mu \rightarrow 0$ имеет решение предыдущего раздела с двумя четкими резонансами и одним антирезонансом. Частоты этих явлений определяются по прежним формулам (61), (64), в т.ч. и для случая с диссипацией.

Обратим внимание, что все кривые пересекаются в двух точках S и T , причем, если одна точка опускается, то другая - поднимается. Можно так подобрать параметры вибромашины, что эти точки S и T будут на одной высоте. Эти два варианта представлены на рис. 31, причем даны графики и для амплитуды A_2 рабочего органа m_2 .

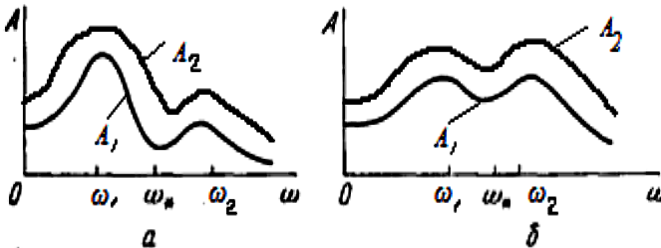


Рис. 31. Настройка двухмассной вибромашины:

а – вариант настройки на гашение колебаний массы m_1 ;

б – вариант расширения резонансной зоны колебаний рабочего органа

Из рисунков следует, что первая настройка (рис. 31а) обеспечивает удовлетворительную виброизоляцию рамы машины, вторая (рис. 31б) – сглаживание зоны между резонансными пиками. Таким образом, во втором случае имеется «плато» резонанса рабочего органа, и ему будет трудно выйти из этой зоны (чего и добиваются от резонансной машины).

Режим «плато» осуществляется при выполнении условия:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

При этом одинаковые ординаты точек S и T (рис. 30) составляют величину:

$$A_1 = \frac{\Phi_0}{c} \sqrt{\frac{2m_1}{m_2} + 1}.$$

Амплитуда колебаний рабочего органа (массы m_2) может быть подсчитана из сопоставления выражений для A_1 и A_2 (67):

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{c_2^2 + b_2^2 \omega^2}{(c_2 - m_2 \omega^2) + b_2^2 \omega^2}}.$$

Подробнее об этих настройках, хотя они касаются виброгасителей [111], можно прочитать в книгах С.П. Тимошенко¹.

Таким образом, можно констатировать, что по сравнению с одномассной двухмассная система представляет большие возможности для виброизоляции машины и ее резонансной настройки без применения специальных автоматических устройств.

1.3.3. Система «трактор-орудие» с упруго-демпфирующим сцепным устройством

В последнее время появились рекомендации по применению пружинных тягово-сцепных устройств, которые превращают систему «трактор-орудие» в систему с двумя степенями свободы (двухмассную). Рассмотрим динамические свойства этой системы на модели, представленной на рисунке 32.

В этой модели масса трактора обозначена m_1 , орудия – m_2 . Пружина c_1 характеризует упругие свойства шин трактора. Демпфер b_1 отражает явление рассеяния энергии при взаимодействии колес трактора с почвой. Упруго-демпфирующая

¹ **Степан Прокофьевич Тимошенко** (1878-1972) – родился на Украине, в 1920 году эмигрировал в Югославию, затем в США (1922). Автор многочисленных трудов по теории колебаний. Член многих академий мира, в том числе иностранный член АН СССР. Умер в ФРГ.

сцепка трактора и орудия представлена пружиной c_2 и демпфером b_2 .

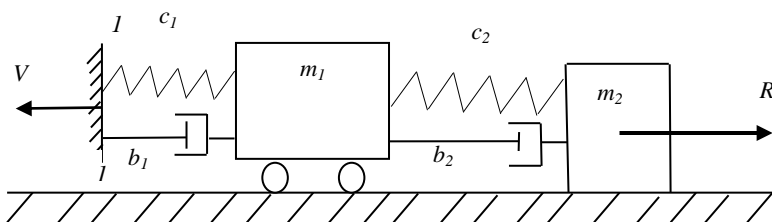


Рис. 32. Расчетная схема колебательной системы «трактор-орудие»

Сопротивление почвы характеризуется силой R . Как известно, оно носит случайный характер, но отличается в большинстве случаев эргодичностью, т.е. устойчивыми статистическими характеристиками. Однако в самом первом приближении силу R можно представить в виде детерминированной функции:

$$R = P + \Phi_0 \sin \omega t, \quad (69)$$

где P – некоторая постоянная составляющая сопротивления, а Φ_0 – по-прежнему амплитуда гармонической силы.

Возможна также раскачка орудия в результате возникновения автоколебаний.

Сила P – растягивает пружины c_1 и c_2 на некоторую величину. Если рассматривать колебания масс m_1 и m_2 около этих положений статического равновесия, то силу P можно не учитывать в уравнениях движения.

Вся эта модель участвует в абсолютном движении со скоростью трактора V . Будем рассматривать относительные колебания (относительно звена 1-1 (рис. 32)).

От предыдущей модели данная отличается наличием еще одного демпфера b_1 и тем, что вынуждающая сила $\Phi(t)$ приложена не к инерционному элементу m_1 , а к массе m_2 , т.е. к орудью.

Эта схема интересна тем, что позволяет выявить возможность колебаний орудия без передачи их на трактор. Обозначенный случай весьма желателен, поскольку колебания орудия снижают его тяговое сопротивление (что доказано многочисленными экспериментами). Отсутствие колебаний трактора положительно сказывается на работе двигателя, снижает динами-

ческую нагруженность узлов и деталей трактора, создает соответствующие эргономические условия для механизатора.

Дифференциальные уравнения колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \Phi_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (70)$$

Опуская громоздкие вычисления, запишем лишь некоторые конечные формулы.

Резонансные частоты определяются из выражения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 \cdot c_2 + m_2(c_1 + c_2) \pm \sqrt{[m_1 c_2 + m_2(c_1 + c_2)]^2 - 4m_1 m_2 c_2^2}}{2m_1 m_2}. \quad (71)$$

Антирезонансная частота находится по простой формуле

$$\omega_* = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m_1}}. \quad (72)$$

Таким образом, чтобы колебания агрегата были минимальными, жесткость сцепки должна подбираться по условию

$$c_2 = m_1 \omega^2 - c_1. \quad (73)$$

Графическая иллюстрация решения приведена на рисунке 33.

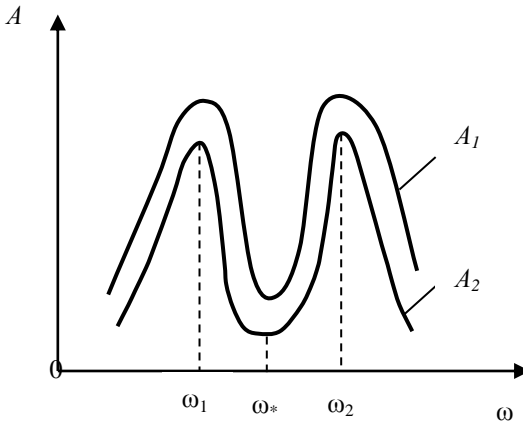


Рис. 33. Амплитудно-частотная характеристика машинно-тракторного агрегата

Как видим, колебания орудия и трактора вполне идентичны. Причем амплитуда колебаний трактора больше, чем орудия. Как и в предыдущих схемах, наблюдаются два резонанса и один антирезонанс.

Если бы сцепка была жесткая, то наблюдался бы один резонанс на частоте

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + m_2}}. \quad (74)$$

Но вопрос, поставленный в начале раздела, мы должны ответить отрицательно. Интенсивных колебаний орудия и одновременно отсутствия таковых на тракторе достичь невозможно. Учитывая неопределенность частоты возбуждения ω , которое зависит к тому же от скорости движения трактора, настроить сцепку на антирезонансный режим также весьма проблематично. По крайней мере, она должна быть с изменяемой жесткостью, чтобы каждый раз проводить подстройку на изменившиеся условия функционирования агрегата.

Данный анализ позволяет также утверждать, что с помощью пружинного динамометра невозможно измерить колебания тяговой нагрузки, поскольку этот прибор может изменять размах колебаний в системе.

1.3.4. Одномассная система с двумя степенями свободы

Ярким примером такой системы является центрированная система (рис. 34), в которой рабочий орган 1 приводится в колебательное движение *центробежным вибровозбудителем 2 с круговой вынуждающей силой*. В центрированной системе центробежная сила дебаланса, равнодействующая упругих сил, приложенных к рабочему органу, и равнодействующая приложенных к нему диссипативных сил все время приходят через центр тяжести рабочего органа. Оси x и y совпадают с главными осями жесткости и сопротивления. Рабочий орган совершает поступательные вынужденные колебания.

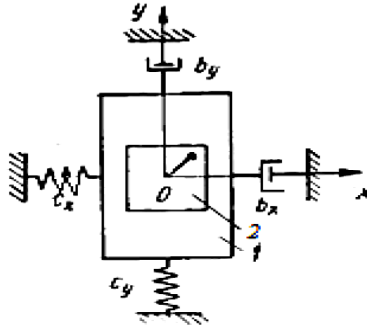


Рис. 34. Центрированная колебательная система с двумя степенями свободы

В соответствии с этим дифференциальные уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_0)\ddot{x} + b_x\dot{x} + c_x x &= m_0 r \omega^2 \sin \omega t \\ (m_1 + m_0)\ddot{y} + b_y\dot{y} + c_y y &= m_0 r \omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (75)$$

где m_0 , r , ω – масса дебаланса, ее эксцентриситет относительно оси вращения и угловая скорость дебаланса.

Отвечающие установившимся вынужденным колебаниям решения этих уравнений имеют вид [23]:

$$\begin{aligned} x &= A_x \sin(\omega t - \phi_x); \\ y &= A_y \cos(\omega t - \phi_y), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\text{где } A_x = \frac{m_0 r \omega^2}{(m_1 + m_0) \sqrt{(\omega_{0x}^2 - \omega^2)^2 + 4n_x^2 \omega^2}},$$

$$A_y = \frac{m_0 r \omega^2}{(m_1 + m_0) \sqrt{(\omega_{0y}^2 - \omega^2)^2 + 4n_y^2 \omega^2}}, \quad (77)$$

$$\phi_x = \arctg \frac{2n_x \omega}{\omega_{0x}^2 - \omega^2}, \quad \phi_y = \arctg \frac{2n_y \omega}{\omega_{0y}^2 - \omega^2}, \quad (78)$$

$$\omega_{ox} = \sqrt{\frac{c_x}{m_1 + m_0}}, \quad \omega_{oy} = \sqrt{\frac{c_y}{m_1 + m_0}}, \quad (79)$$

$$n_x = \frac{b_x}{2(m_1 + m_0)}, \quad n_y = \frac{b_y}{2(m_1 + m_0)}.$$

В общем случае, когда коэффициенты сопротивления не равны нулю и поведение системы описывается равенствами (77-78), рабочий орган совершает эллиптические колебания, но оси эллиптической траектории, вообще говоря, не параллельны осям координат. Одна из осей эллиптической траектории повернута относительно оси Ox на угол:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2A_x A_y \sin(\phi_y - \phi_x)}{A_y^2 - A_x^2}. \quad (80)$$

Амплитуда колебаний вдоль этой оси эллипса:

$$A_1 = \frac{A_x A_y |\cos(\phi_y - \phi_x)|}{\sqrt{\frac{A_x^2 + A_y^2}{2} - \frac{A_x^2 - A_y^2}{2} \cos 2\alpha + A_x A_y \sin(\phi_y - \phi_x) \sin 2\alpha_1}}. \quad (81)$$

Амплитуда колебаний вдоль второй оси эллиптической траектории:

$$A_2 = \frac{A_x A_y |\cos(\phi_y - \phi_x)|}{\sqrt{\frac{A_x^2 + A_y^2}{2} + \frac{A_x^2 - A_y^2}{2} \cos 2\alpha - A_x A_y \sin(\phi_y - \phi_x) \sin 2\alpha_1}}. \quad (82)$$

Когда $|\phi_y - \phi_x| < \pi/2$, рабочий орган движется в направлении вращения дебаланса, когда же $|\phi_y - \phi_x| > \pi/2$, рабочий орган движется в направлении, противоположном вращению дебаланса. При $|\phi_y - \phi_x| = \pi/2$ эллиптическая траектория вырождается в прямолинейную, причем амплитуда колебаний $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ и угол наклона траектории к оси Ox :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{A_y}{A_x} \sin(\phi_y - \phi_x) \right]. \quad (83)$$

Когда $A_x = A_y$ и $\phi_x - \phi_y = 0$, рабочий орган совершает круговые колебания в направлении вращения дебаланса. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $b_x = b_y$, $c_x = c_y$.

Если в показанной на рисунке 35 системе отсутствуют пружины, т.е. $c_x = c_y = 0$, то на основании выражений (77)

$$A_1 = \frac{m_0 r \omega}{(m_1 + m_0) \sqrt{\omega^2 + 4n_x^2}}, \quad A_2 = \frac{m_0 r \omega}{(m_1 + m_0) \sqrt{\omega^2 + 4n_y^2}}, \quad (84)$$

и на основании выражений (78)

$$\phi_x = \arctg\left(-\frac{2n_x}{\omega}\right), \quad \phi_y = \arctg\left(-\frac{2n_y}{\omega}\right). \quad (85)$$

Поскольку здесь $|\phi_y - \phi_x| < \pi/2$, рабочий орган может совершать только эллиптическое (в частности, круговое) движение в направлении вращения дебаланса.

Материалы данного раздела важны для анализа многочисленных конструкций вибромельниц и вибросмесителей, динамическая схема которых чаще всего представляет центрированную систему с центробежным вибровозбуждением.

В качестве примера на рисунке 35 приведена схема вибромельницы для тонкого измельчения хрупких (сахар, кофе, высушенные лекарственные травы и т. п.) материалов. Такие мельницы выпускаются многими фирмами.

Вибрационная мельница представляет собой камеру, заполненную загрузкой, состоящей из обрабатываемого материала, среды (газ или жидкость) и специальных обрабатывающих тел (шары, цилиндры, стержни, валки, трубы и т.п.). Загрузке сообщается движение посредством вибрационного возбуждения камеры. В результате этого возникает относительное движение частиц загрузки, в зонах их контакта создается высокие механические напряжения, которые приводят к разрушению твердых частиц.

В зависимости от условий обработки, типа и свойства обрабатываемого материала, характеристик мелющих тел и среды, параметров процесса в вибрационных мельницах реализуется различные технологические операции: измельчение, деструкция, механохимические воздействия, поверхностная обработка и т.п. При

отсутствии мелющих тел машина превращается в смеситель сыпучих материалов.

Мельница состоит из барабана 3, который опирается на пружины 5 (рис. 35). Барабан загружается шарами диаметром 10-50 мм примерно на 60-70% объема. В корпусе на подшипниках качения установлен дебалансный вал 4. Он приводится во вращение от электродвигателя 1, соединенного с валом гибкой муфтой 2. Она исключает передачу вибрации от мельницы к электродвигателю. Пружинные опоры корпуса в резонансном режиме существенно снижают передачу вибраций на основание.

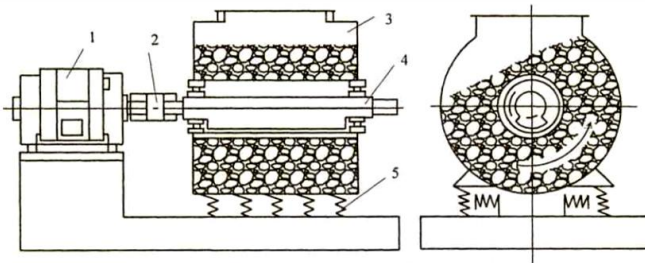


Рис. 35. Схема вибрационной мельницы

При вращении дебалансного вала с частотой от 100 до 150 с⁻¹ корпус мельницы с шарами и измельчаемым материалом приводится в поступательное движение по эллиптической, близкой к круговой траектории. При этом шары измельчают материал ударом и истиранием. Циркуляция шаров в вибрационной мельнице происходит в сторону, противоположную эллиптическим колебаниям корпуса. Измельчаемый материал проходит вдоль корпуса в сложном движении по спирали.

Если диссипацию энергии в вибромельнице отобразить при помощи двух демпферов, то работу вибромельницы приближенно можно моделировать расчетной схемой, представленной на рисунке 34.

1.3.5. Колебательные системы с n степенями свободы

Большое разнообразие вибрационных технологических машин приводит к тому, что зачастую невозможно провести

корректный анализ колебательной системы, ограничившись расчетной схемой с одной-двумя степенями свободы.

Движение в системе с n степенями свободы описывается n независимыми координатами. По-иному, число степеней свободы определяется минимальным числом переменных, необходимым для полного описания движения. Эти переменные представляют, чаще всего, смещения некоторых точек системы.

Не вдаваясь в громоздкую теорию этих колебаний, отметим основные свойства получаемых решений:

1. В линейной системе с n степенями свободы также справедлив принцип суперпозиции колебаний.

2. При гармоническом возбуждении система колеблется с частотой вынуждающей силы, а форма ее меняется в зависимости от частоты.

3. Резонанс возникает при совпадении частоты возбуждения с любой из собственных частот системы.

4. Существуют также антирезонансные частоты, число которых составляет $n-1$.

Как видим, эти выводы можно было сделать на основе рассмотрения системы с двумя степенями свободы.

Рассмотрим некоторые примеры.

В качестве первого примера приведем многомассную систему фруктового дерева (рис. 36), использованную Г.П. Варламовым в исследованиях по вибрационной уборке фруктов [26]. Сосредоточенные массы моделируют наличие больших ветвей дерева с фруктами и с учетом массы некоторой части ствола.

Схема содержит шесть масс, следовательно, следует ожидать в данной системе шесть собственных частот, шесть резонансов и пять антирезонансов. Таким образом, наибольший съем фруктов нужно ждать при полигармоническом нагружении дерева.

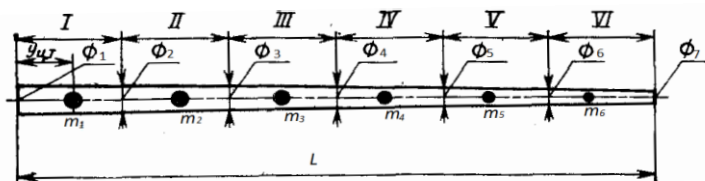


Рис. 36. Расчетная схема ствола дерева с сосредоточенными массами

Другой пример касается сложных пространственных колебаний твердого тела с упругими связями. В общем случае такое тело имеет шесть степеней свободы. Из них три обусловлены возможными поступательными перемещениями вдоль координатных осей, и еще три степени – возможными поворотами вокруг координатных осей. Многие зерноочистительные машины относятся к этому классу динамических систем.

На рисунке 37а приведена конструктивная схема одной такой машины с пространственным движением рабочего органа, разработанная под руководством П.М. Заики [52]¹.

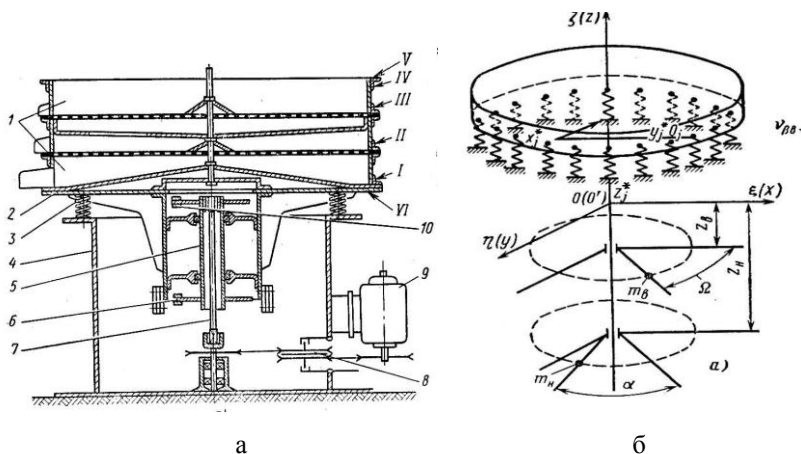


Рис. 37. Конструктивная (а) и расчетная (б) схемы вибрационной зерноочистительной машины с пространственным движением рабочего органа

Машина имеет станину 4, на опорной плите которой расположены по окружности пружины сжатия 3. На пружинах установлен вибростол 2, к которому сверху прикреплен решет-

¹ **Заика Петр Митрофанович** (род. в 1927 г.) – советский и украинский ученый в области земледельческой механики, докт. техн. наук, профессор Харьковского государственного технического университета сельского хозяйства, академик Национальной академии аграрных наук Украины. Внес большой вклад в разработку вибрационных зерноочистительных машин.

ный стан, а снизу – одновальный вибровозбудитель с вертикальной осью вращения дебалансов.

Решетный стан представляет собой набор цилиндрических обечаяк 1, между которыми монтируют круглые решета. Каждая обечайка имеет выходной патрубок для отвода зерна, идущего сходом. Под каждым решетом расположен конус, предназначенный для сбора прохода и направления его на следующее решето или к выходу. В вибровозбудителе установлен вертикальный вал 5, на обоих концах которого расположены диски с верхним 10 и нижним 6 грузами (дебалансами). Угол между грузами можно регулировать в пределах $0-360^\circ$. Привод от электродвигателя 9 осуществляется при помощи клиноременного двухступенчатого вариатора 8. От вариатора к вибровозбудителю вращательное движение передается гибким валом 7.

При изменении угла α относительного расположения дебалансов (рис. 37б) будет изменяться по величине и направлению амплитуда колебаний. Рабочий орган машины при $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ будет совершать одно простое движение – угловые колебания вокруг вертикальной оси. При произвольных значениях угла α , неравных приведенным, решетный стан будет совершать винтовые колебания вокруг той же оси. Все это дает широкие возможности для подбора оптимального закона колебаний рабочего органа по критерию эффективности сепарирования.

1.4. Методы решения уравнений нелинейных колебательных систем

1.4.1. Признаки нелинейных систем

Все рассмотренные выше механические колебательные процессы касались линейных систем. *Линейными колебательными системами* называются такие, свойства которых не меняются при изменении их состояния. Параметры линейных колебательных систем (масса, жесткость пружин, сопротивление среды) не зависят от переменных состояния системы (смещений и скоростей).

Линейные колебательные системы обладают свойствами, значительно упрощающими анализ процессов, которые проис-

ходят в них, и поэтому часто используются для приближенного описания процессов, происходящих в реальных системах.

В тех случаях, когда проявляются изменения параметров, приходится учитывать нелинейность колебательной системы. Колебания таких систем описываются нелинейными уравнениями, а сами системы называются *нелинейными*.

Типы и характеристики нелинейных элементов были представлены ранее на рисунках 14 и 15. Для теории вибрационных технологических машин важное значение имеют следующие нелинейные характеристики *упругих элементов* машин и упругости обрабатываемого материала:

- поддерживающие пружины с кубической характеристикой

$$P = c_1 x + c_3 x^3 \quad (c_1 > 0), \quad (86)$$

где c_1 , c_2 – коэффициенты (при $c_3 > 0$ упругая сила имеет жесткую характеристику, при $c_3 < 0$ – мягкую);

- системы поддерживающих пружин с кусочно-линейными характеристиками, или, по-иному, с упругими упорами;

- системы с жесткими упорами, т.н. виброударные системы;

- системы с учетом упругости обрабатываемого материала, который имеет характеристики вида

$$p = E_1 \varepsilon^\alpha, \text{ или } p = E_2 \left[\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right]^\gamma,$$

где E_1 , E_2 , α , γ – эмпирические коэффициенты;

ε – относительная деформация материала, пропорциональная перемещению x ;

- разномодульность обрабатываемой среды при сжатию-растяжении, что характерно для сыпучих материалов;

- проявление обрабатываемой средой свойств ползучести, т.е. изменение деформации во времени даже при неизменном напряжении.

Сопrotивление обрабатываемой среды зачастую является нелинейной характеристикой скорости:

- нелинейно-вязкое трение, в том числе квадратично-вязкое:

$$F = b\dot{x}^2;$$

- сухое кулоново трение:

$$F = F_0 \text{sign}(\dot{x}), \quad (87)$$

где F_0 – модуль силы сухого трения;

$\text{sign}(\dot{x})$ (читается сигнум \dot{x}) – функция, принимающая значения:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \dot{x} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{x} = 0 \\ -1 & \dot{x} < 0; \end{cases} \quad (88)$$

- сухое некулоново трение:

$$F = F_0 \text{sign} \dot{x} - b_1 \dot{x} + b_3 \dot{x}^3, \quad (89)$$

где b_1, b_2 – эмпирические коэффициенты.

Даже для случаев слабой нелинейности появляются новые черты движения, которых не наблюдалось у линейных систем:

1. Возможно несколько (в зависимости от начальных условий) режимов колебаний данной системы при определенном значении частоты ω . При неизменной амплитуде вынуждающей силы резонансная кривая приобретает характерный «завал» - вправо при жесткой характеристике и влево при мягкой характеристике. В случае, когда амплитуда возмущающей силы зависит от частоты возбуждения, возможно появление изолированных ветвей резонансной кривой.

2. Срыв колебаний, т.е. скачкообразный переход на иной режим с другим значением амплитуды колебаний при медленном изменении частоты возмущения.

3. Возможность возникновения колебаний более «медленных», чем основные колебания (*субгармонические колебания*). Любопытной особенностью таких колебаний является их относительно большая амплитуда при слабом демпфировании, так что эти колебания иногда приобретают доминирующие значения. С другой стороны, существуют критические значения коэффициентов демпфирования, начиная с которых субгармоники не появляются.

4. Возникновение колебаний более «быстрых», чем основные (*супер-гармонические колебания*), в случаях, когда соот-

ветствующие составляющие в выражении для возмущающей силы $F(t)$ отсутствуют.

Принципиальное физическое и математическое отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний заключается в следующем:

1. Из-за нелинейности *нарушается принцип суперпозиции* действия вынуждающих сил, при этом отдельные гармоники выступают во взаимодействие между собой.

2. В линейных системах при наличии сопротивления установившиеся колебания могут возникать лишь под действием внешней периодической силы. В нелинейной же системе *колебания могут генерироваться самой системой* (т.н. автоколебания) в отсутствие периодической силы.

В физике последнее время широко используется термин «*нелинейная динамика*». Эта та же теория нелинейных колебаний, но с акцентом на изучение сложного динамического поведения систем, вплоть до образования *хаоса и регулярных структур в различных системах, средах и материалах*.

Как мы увидим в последующих разделах, такие явления и эффекты наблюдаются и в рабочих средах, обрабатываемых вибрационными технологическими машинами.

В заключение раздела следует особо подчеркнуть, что полезное использование колебаний и вибраций обусловлено как раз проявлением нелинейности в вибрационных машинах, порождающей специфические явления и эффекты, целенаправленно используемые в технологии.

1.4.2. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова

Обратимся к анализу методов решения уравнений, характеризующих динамику вибрационных технологических машин. Особенностью этих уравнений является то обстоятельство, что они чаще всего нелинейные и, следовательно, точно неинтегрируемые. В настоящее время нет общего метода интегрирования нелинейных уравнений и в приближенном виде. Те редкие случаи точного интегрирования нелинейных уравнений, как в знаменитой задаче Н.Е. Жуковского о плоском рассеве, объясняются определенной симметрией системы уравнений.

Необоснованная линеаризация нелинейных уравнений приводит, чаще всего, к потере многих свойств и эффектов, присущих только нелинейным системам.

В настоящее время известно много методов и подходов к решению нелинейных уравнений. Наибольшей универсальностью обладает асимптотический метод исследования нелинейных колебаний, разработанный советскими математиками Н.М. Крыловым, Н.Н. Боголюбовым и Ю.А. Митропольским [20].

Суть этого метода состоит в следующем. Пусть мы имеем нелинейную систему, описываемую уравнением вынужденных колебаний:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon \Phi_0 \sin \omega t, \quad (90)$$

где m – масса колеблющегося тела;

c – коэффициент упругости;

ε – малый положительный параметр, указывающий на малость нелинейного составляющего и силы Φ_0 ;

$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – нелинейная функция, включающая упругие и диссипативные члены.

Решение уравнения (90) в первом приближении ищут в виде:

$$x = A \cos(\omega t + \phi). \quad (91)$$

Величины A и ϕ определяются из системы уравнений

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(A, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon \Phi_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cos \phi; \quad (92)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega m A} \int_0^{2\pi} f_0(A, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon \Phi_0}{mA(\omega_0 + \omega)} \sin \phi, \quad (93)$$

где ω_0 – собственная угловая частота системы;

ψ – полная фаза колебаний ($\psi = \omega t + \phi$).

Далее вводятся обозначения:

$$b_e(A) = \frac{\varepsilon}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f_0(A \cos \psi, -A \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (94)$$

$$c_e(A) = k - \frac{\varepsilon}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_0(A \cos \psi, -A \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (95)$$

где $b_e(A)$ и $c_e(A)$ являются, соответственно, эквивалентным коэффициентом затухания и полным эквивалентным коэффициентом упругости для рассматриваемой колебательной системы в свободном состоянии, то есть при отсутствии внешнего воздействия.

Подсчитывая b_e и c_e по формулам (94, 95), мы фактически нелинейный член

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

заменяем линейным

$$F_e = -\left[c_1(A)x + b_e(A) \frac{dx}{dt} \right],$$

где $c_1(A) = c_e(A) - c$.

Значение эквивалентного коэффициента затухания $b_e(A)$, даваемого формулой (94), получено, исходя из предпосылки, что средние (за период колебаний) мощности, необходимые для преодоления реальной и эквивалентной диссипативных сил, равны.

Аналогичная интерпретация для другого коэффициента $c_1(A)$ связана с реактивной мощностью, развиваемой реальной и эквивалентной упругими силами. **Реактивная мощность**, как уже указывалось, – понятие, пришедшее из электротехники. В механической колебательной системе эта мощность также присутствует, не производя ни положительной, ни отрицательной работы.

Тогда мощность, реализуемую для преодоления диссипативной силы, можно назвать, для полной аналогии с электротехникой, **активной мощностью**.

Таким образом, первое приближение удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b_e(A) \frac{dx}{dt} + c_e(A)x = 0, \quad (96)$$

где b_e и c_e зависят от амплитуды колебаний.

В связи с принятыми обозначениями, уравнения (92, 93) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dA}{dt} = n_e(A)A - \frac{\varepsilon\Phi_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cos \phi; \quad (97)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_{oe}(A) - \omega \frac{\varepsilon\Phi_0}{mA(\omega_0 + \omega)} \sin \phi, \quad (98)$$

где $n_e(A) = b_e(A)/(2m)$, $\omega_{oe}(A) = \sqrt{f_e(A)/m}$ – суть эквивалентный декремент затухания и эквивалентная частота нелинейных собственных колебаний.

С помощью уравнений (97, 98) возможно описание процесса установления вынужденных колебаний.

Чаще всего исследователя вибрационных машин интересуют стационарные режимы колебаний, для которых

$$\frac{dA}{dt} = 0; \quad \frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (99)$$

Следовательно, для этих режимов уравнения (97, 98) примут вид

$$-n_e(A)A - \frac{\varepsilon\Phi_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cos \phi = 0; \quad (100)$$

$$\omega_{oe}(A) - \omega \frac{\varepsilon\Phi_0}{mA(\omega_0 + \omega)} \sin \phi = 0. \quad (101)$$

Или с точностью до величин второго порядка малости ($\omega_0 \approx \omega$; $\omega_{oe} \approx \omega$):

$$2m\omega A n_e(A) = -\varepsilon\Phi_0 \cos \phi, \quad (102)$$

$$mA \left[\omega_{oe}^2(A) - \omega^2 \right] = -\varepsilon\Phi_0 \sin \phi. \quad (103)$$

Из этих уравнений можно найти зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$m^2 A^2 \left\{ \left[\omega_{oe}^2(A) - \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 n_e^2(A) \right\} = \varepsilon^2 \Phi_0^2. \quad (104)$$

Последние три уравнения по форме совпадают с соответствующим уравнениями линейных колебаний, то есть введение эквивалентных декремента затухания и собственной частоты колебательной системы действительно привело к линейаризации исходного нелинейного уравнения. По этим уравнениям можно построить амплитудно-частотную характеристику системы, а также найти начальную фазу колебаний.

Результаты первого приближения для стационарных колебаний совпадают с результатами, получаемыми *методом гармонического баланса*.

Обычно первого приближения достаточно для исследования основного резонанса и получения информации об основных динамических свойствах системы. В противном случае нужно переходить к построению решений второго приближения вида

$$x = A \cos \psi + \varepsilon u_1(A, \psi), \quad (105)$$

где $u_1(A, \psi)$ определяется как вынужденное колебание, возбуждаемое в системе высшими гармониками внешней силы в режиме синусоидальных колебаний.

Методика построения высших приближений изложена в трудах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [20].

В нелинейных системах при одной и той же вынуждающей силе могут существовать периодические колебания различных амплитуд. Установление того или иного вида зависит от начальных условий. В процессе работы технологической машины под воздействием различных возмущающих факторов возможен перескок с одного режима работы на другой. Все это заставляет исследовать нелинейные вынужденные колебания на устойчивость.

Условия устойчивости определяются неравенствами

$$\frac{dA}{d\omega} > 0, \text{ если } \omega_{oe}(A) > \omega; \quad (106)$$

$$\frac{dA}{d\omega} < 0, \text{ если } \omega_{oe}(A) < \omega. \quad (107)$$

Если, воспользовавшись уравнением (104), построить резонансную кривую (рис. 38), а также кривую, соответствующую $\omega_{oe}(A) = \omega$, то анализ устойчивости становится наглядным.

На указанном рисунке устойчивые участки обозначены жирной линией. Ветви кривой, лежащие левее кривой $\omega = \omega_{oe}(A)$, будут соответствовать устойчивым амплитудам на тех участках, на которых A возрастает вместе с ω .

На ветви, лежащей правее пунктирной кривой, наоборот, устойчивыми будут те участки, на которых A убывает с возрастанием ω .

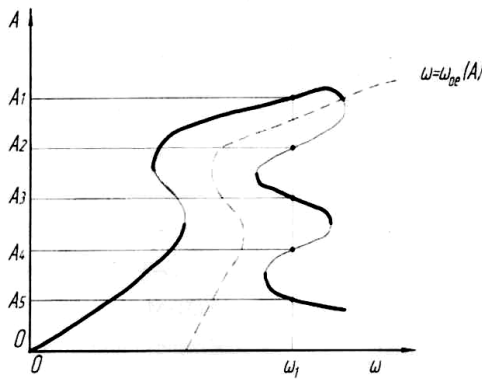


Рис. 38. К анализу устойчивости вынужденных нелинейных колебаний

На представленном рисунке при одной и той же частоте ω_1 теоретически возможно осуществление пяти режимов колебаний с амплитудами $A_1 \dots, A_5$. Однако устойчивыми, то есть физически реализуемыми, являются колебания с амплитудами A_1, A_3 и A_5 .

Асимптотический метод является самым мощным и универсальным средством исследования нелинейных колебаний. Он применим для неустановившихся и стационарных колебаний, свободных и вынужденных, одно- и многочастотных, резонансных и нерезонансных, в системах со многими степенями свободы, параметрических и автоколебаний.

В то же время для рассмотрения только стационарных колебаний предложены более простые методы, идейно примыкающие к рассмотренному. Речь идет, в частности, о методе гар-

монического баланса (гармонической линеаризации), который будет изложен в следующем пункте.

1.4.3. Метод гармонического баланса

Метод гармонического баланса является одним из наиболее простых приближенных методов аналитического исследования нелинейных колебательных систем. В своей наиболее простой форме, представленной ниже, этот метод позволяет исследовать только стационарные режимы движения.

Если на слабонелинейную и слабодиссипативную систему действует гармоническая внешняя сила, то уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) + (\Phi_0 / m) \cos \omega t. \quad (108)$$

Здесь слагаемое $f(x, \dot{x})$ объединяет малые нелинейные упругие и диссипативные члены уравнения.

В соответствии с методом гармонического баланса в первом приближении решение уравнения (108) можно искать в виде

$$x = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t, \quad (109)$$

где a_1 и a_2 – амплитуды первых гармонических составляющих решения;

a_0 – постоянная составляющая, которая может появиться в решении при наличии в системе несимметричных элементов.

Подставляя (109) в выражение для функции $f(x, \dot{x})$, разлагая полученное соотношение в ряд Фурье и отбрасывая все члены этого ряда кроме постоянной составляющей и первой гармоники, представим $f(x, \dot{x})$ приближенным выражением:

$$f(x, \dot{x}) \approx B_0 + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t; \quad (110)$$

где

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) d(\omega t); \quad (111)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos \omega t d(\omega t); \quad (112)$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \sin \omega t d(\omega t). \quad (113)$$

Подставляя (110) в (108) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармонических функциях в правой и левой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 a_0 &= B_0; \\ a_1(\omega_0^2 - \omega^2) &= B_1 + \Phi_0 / m; \\ a_2(\omega_0^2 - \omega^2) &= B_2. \end{aligned} \quad (114)$$

Выражая отсюда a_0 , a_1 и a_2 и подставляя их в формулу (109), получаем искомое решение.

1.4.4. Метод малого параметра Пуанкаре-Ляпунова

Нелинейные дифференциальные уравнения иногда решают путем последовательных приближений, представляя искомую величину x в виде ряда по степеням малого параметра ε

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (115)$$

где x_0 – решение уравнения нулевого (порождающего) приближения (последнее получают из исходного, полагая, что все нелинейные члены в исходном уравнении отсутствуют, т.е. $\varepsilon = 0$);

x_1 – решение уравнения первой поправки, которая учитывает влияние нелинейных членов в первом приближении;

x_2 – решение уравнения второй поправки и т.д.

Если исходное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, а вынужденный режим представляет собой колебательный процесс, то квадрат угловой частоты первой гармоники ω^2 или первую степень ω также разлагают в ряд по малому параметру:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (116)$$

где ω_0^2 – квадрат угловой частоты в нулевом приближении, когда всеми нелинейными членами пренебрегают;

εf_1 – поправка первого приближения, вызванная нелинейными членами уравнения;

$\varepsilon^2 f_2$ – поправка второго приближения и т.д.

1.4.5. Метод прямого разделения движений

В вибрационных устройствах и технологических процессах часто под действием вибрации появляется направленное в среднем медленное (трендовое, эволюционное) движение или на заданное медленное (в частности, равномерное) движение накладываются быстрые вибрационные движения (рис. 39). Например, под действием вибраций шероховатой плоскости возникает сползание с ней частицы с некоторой скоростью, зависящей от параметров вибраций. Вращение дебалансов чаще всего не является строго равномерным, т.е. равномерным только в среднем и т.д.

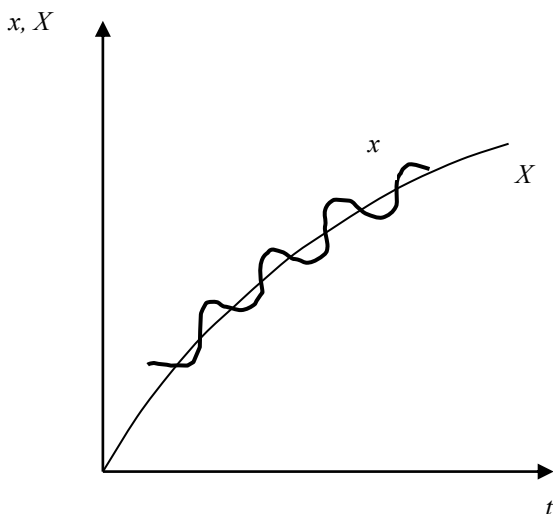


Рис. 39. Действительное $x(t)$ и усредненное (трендовое) $X(t)$ движение системы

Для технологических процессов интерес представляют именно медленные (часто равномерные в среднем) движения. Именно для таких многочисленных случаев И.И. Блехман¹ разработал общий теоретический подход – метод прямого разделения движений, положенный в основу нового научного направления – вибрационной механики [18].

Как указывает сам И.И. Блехман, толчком к разработке этого подхода послужили статьи академика П.Л. Капицы [61] об устойчивости перевернутого положения маятника. В этих работах на основе приближенного эвристического, но физически ясного приема было показано, что при достижении определенной частоты колебаний точки подвеса маятник становится устойчивым в своем верхнем положении. Более того, если отклонить маятник в сторону, то он начинает колебаться около верхнего вертикального положения. Это было продемонстрировано П.Л. Капицей на простейшей установке с моторчиком от швейной машины. Данное явление было объяснено появлением *дополнительного момента*, обусловленного колебаниями точки подвеса и названного вибрационным.

Справедливости ради следует отметить, что задолго до Капицы в 1908 г. к таким же выводам пришел английский математик А. Стефенсон. В 1950 г., за год до выхода статей П.Л. Капицы, данное явление, а также вращение маятника под действием колебаний оси было предсказано и объяснено с помощью асимптотического метода Н.Н. Боголюбовым.

Как часто бывает в науке, на публикации А. Стефенсона и Н.Н. Боголюбова особого внимания не обратили, а публикации П.Л. Капицы вызвали повышенный интерес к этой проблеме, что и привело к созданию *вибрационной механики*.

¹ **Блехман Илья Израилевич** (род. в 1928 г.) – заслуженный деятель науки РФ, докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией вибрационной механики Института проблем машиноведения РАН и ОАО «Механобр-Техника» (г. Санкт-Петербург). Автор фундаментальных трудов по виброперемещению, самосинхронизации вибровозбудителей, другим проблемам теории колебаний. Основатель и бесценный лидер научного направления «Вибрационная механика».

В общем плане, при описании механических систем с подобными эффектами, следует исходить из дифференциального уравнения:

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t) + \Phi(\dot{x}, x, t, \omega t), \quad (117)$$

где F – «медленная» сила;

Φ – «быстрая» сила, имеющая период 2π по «быстрому» времени ωt .

Из характера действующих на точку сил ясно, что ее движение на плоскости складывается из движения вдоль некоторой плавной кривой и быстрых осцилляций с частотой ω около неё. Исходя из сказанного, решение уравнения (117) ищем в виде:

$$x(t) = X(t) + \xi(t, \omega t), \quad (118)$$

где ξ представляет собой осцилляции около плавного движения X .

Величину ξ можно рассматривать и как разность между x и средним движением X . Потребуем поэтому, чтобы среднее значение функции ξ за период $2\pi / \omega$ было равно нулю:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t, \tau) d\tau = 0, \quad \tau = \omega t. \quad (119)$$

Из предыдущего неизбежно следует, что $X(t) = \langle x(t, \tau) \rangle$, т.е. медленная составляющая X является средним значением координаты x .

Для успешного применения данного метода необходимо, чтобы период изменения компоненты X по крайней мере в три раза превышал период колебания компоненты ξ [18].

Подставив выражение (118) в уравнение (117), получим

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t) + \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, \omega t). \quad (120)$$

В левой части получили простую сумму (суперпозицию) ускорений в связи с линейностью исходного члена $m\ddot{x}$.

Обозначим через $\langle F \rangle$ и $\langle \Phi \rangle$ средние значения сил F и Φ за период колебаний $2\pi / \omega$. Приближенно их можно вычислить по формулам:

$$\langle F(\dot{X}, X, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t) d\tau, \quad \tau = \omega t;$$

$$\langle \Phi(\dot{X}, X, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, \tau) d\tau.$$

Особо следует отметить, что переменные \dot{X} , X , t в этих формулах считаются постоянными параметрами, поскольку они не могут существенно измениться за период колебаний.

Интегрирование ведется по быстрому времени $\tau = \omega t$, от которого зависят только смещение ξ , скорость $\dot{\xi}$ и сила Φ . Данное приближенное вычисление средних значений сил F и Φ составляет основную идею метода прямого разделения движений, который позволяет выделить каждый вид движения, т.е. записать уравнения для X и ξ отдельно.

Приравняв среднее значение правой части уравнения, равное $\langle F \rangle + \langle \Phi \rangle$, среднему значению его левой части $m\ddot{X}$, получаем уравнение медленного движения

$$m\ddot{X} = \langle F(\dot{X}, X, t) \rangle + \langle \Phi(\dot{X}, X, t) \rangle. \quad (121)$$

Вычитая почленно из уравнения (120) уравнение (121), получим уравнение быстрого движения:

$$m\ddot{\xi} = F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t) + \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, \omega t) - \langle F(\dot{X}, X, t) \rangle - \langle \Phi(\dot{X}, X, t) \rangle. \quad (122)$$

Переменные \dot{X} , X и t считаем в данном уравнении также постоянными параметрами.

Уравнение (121) относительно функции X может быть записано только после нахождения функции ξ . Вместе с тем, чтобы решить уравнение (122) относительно ξ , следует знать среднее движение X . Для выхода из этого положения необходимо преодолеть основную трудность, связанную с применением метода прямого разделения движений. Уравнение относительно ξ и его решение находят каким-либо другим приближенным методом, который может быть основан, в частности, на разложении сил F и Φ в ряды Тейлора, а также на разложении функции ξ в ряд по степеням малого параметра.

Однако, чаще всего, до таких разложений дело не доходит, поскольку возможны различные упрощения исходного уравнения.

Возможны следующие случаи:

1) $F \ll \Phi_0$, тогда силу F игнорируют и довольствуются чисто инерционным приближением при решении уравнения быстрого движения;

2) скорость эволюционного движения постоянна ($X = const$) на всем промежутке времени t , что устанавливается обычно из эксперимента;

3) сила Φ не зависит от X, \dot{X}, t , а лишь от $\tau = \omega t$, тогда $\langle \Phi(\tau) \rangle = 0$.

Возможны и другие упрощающие предположения.

1.4.6. Численные методы решения нелинейных уравнений колебаний

Развитие компьютерной техники привело к тому, что численные методы решения стали доступны студенту технического вуза, при этом не нужно составлять программы решения.

Напомним суть численного метода решения дифференциальных уравнений. Начнем с простейшего метода ломаных Эйлера.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y'_x = f(x, y) \quad (123)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Требуется найти приближенное решение уравнения $y = y(x)$ на отрезке $[x_0, x_*]$.

Разделим отрезок $[x_0, x_*]$ на n равных частей длиной $\Delta x = \frac{x_* - x_0}{n}$. Будем искать приближенные значения y_1, y_2, \dots, y_n функции $y(x)$ в точках деления $x_1, x_2, \dots, x_n = x_*$.

При заданном начальном условии $y_0 = y(x_0)$ значения искомой величины $y_k = y(x_k)$ в остальных точках $x_k = x_0 + k\Delta x$ при достаточном малом Δx последовательно вычисляются по формуле:

$$y_k = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x \quad (\text{ломаная Эйлера}), \quad (124)$$

где $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Метод Эйлера является одношаговым методом первого порядка точности (относительно шага Δx). На рисунке 40 показаны два шага решения по методу Эйлера.

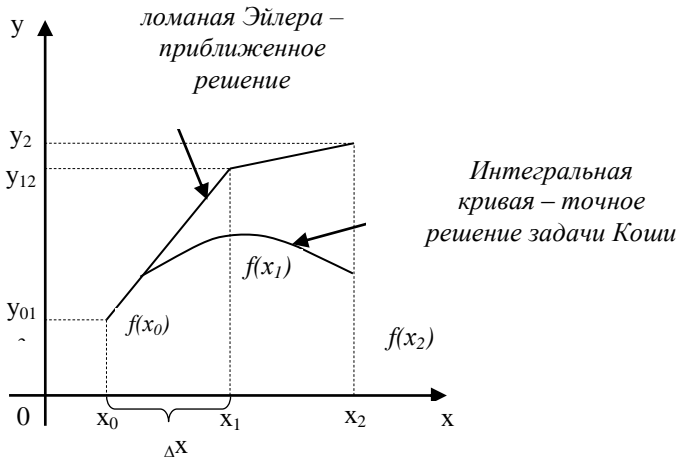


Рис. 40. К пояснению метода Эйлера

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности получил наибольшее распространение при численном интегрировании уравнений колебаний. Искомые значения y_k последовательно вычисляются по формулам

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)\Delta x, \quad (125)$$

где использованы краткие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_k, y_k), & f_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + \frac{1}{2}f_1\Delta x\right), \\ f_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + \frac{1}{2}f_2\Delta x\right), \\ f_4 &= f\left(x_k + \Delta x, y_k + f_3\Delta x\right). \end{aligned} \quad (126)$$

На практике вычисления проводят по любой из приведенных выше рекуррентных формул с двумя разными шагами Δx и

$\frac{1}{2}\Delta x$, где малая величина Δx выбрана произвольно. Затем сравнивают результаты в общих точках. Если в пределах заданной точности результаты совпадают, то считают, что выбранный шаг Δx обеспечивает заданную точность вычисления. Если результаты в пределах заданной точности не совпадают, то шаг уменьшают в два раза и проводят вычисления с шагами $\frac{1}{2}\Delta x$ и $\frac{1}{4}\Delta x$ и опять сравнивают результаты и т.д.

На методе Рунге-Кутты основана функция *Odesolve* программы *Mathcad*, используемая с ключевым словом *Given* (дано).

Функция *Odesolve* объединила все лучшие функции *Mathcad* для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в единый блок. Блок *Given-Odesolve* решает дифференциальные уравнения любого порядка, как с начальными, так и с граничными условиями. Он может также решать системы дифференциальных уравнений.

При использовании блока *Given-Odesolve* необязательно выполнять преобразование ОДУ к стандартному виду.

Пользователь или сама система *Mathcad* может выбрать один из четырех алгоритмов решения через функцию *Odesolve:c* *постоянным шагом, адаптивный метод* (автоматический выбор шага), метод Адамса (BDF), метод RADAUS.

Первые два алгоритма являются реализацией метода Рунге-Кутты. Алгоритм Адамса (BDF) по ходу численного интегрирования сам решает, какой метод применить для решения не жестких (Adams) или жестких (BDF-backwarddifferen-tiation-formula) уравнений.

Метод RADAUS, реализующий неявный метод Рунге-Кутты пятого порядка, подходит для решения очень жестких систем.

Жесткость систем (ОДУ) определяется порядком коэффициентов при разных слагаемых. Именно степень этого различия и определяет жесткость ОДУ.

Уравнения колебаний является жесткими, если в них присутствуют компоненты с резко различающимися частотными и амплитудными характеристиками, с резко выраженными нелинейностями и т.д.

1.5. Колебания одномерных систем в нелинейной постановке

1.5.1. Модель Дуффинга при моногармоническом нагружении

Моделью или уравнением Дуффинга называется уравнение вида

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x + c_3x^3 = \Phi_0 \cos \omega t. \quad (127)$$

В этом уравнении восстанавливающая сила отвечает соотношению (86), т.е. обладает нелинейной симметричной характеристикой. Уравнению Дуффинга будет отвечать колебательная система (рис. 16 в) с нелинейными поддерживающими пружинами.

Преобразуем это уравнение к виду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = (\Phi_0 / m) \cos \omega t, \quad (128)$$

где $n = \frac{b}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$; $\varepsilon = \frac{c_3}{m}$.

Величина ε представляет собой малый параметр, степень нелинейности системы. При $\varepsilon = 0$ система становится линейной.

Поскольку в системе присутствует диссипация, то следует предположить, что вынужденные колебания будут отставать по фазе от вынуждающей силы. В первом приближении их можно считать гармоническими, происходящими с частотой вынуждающей силы, т.е.

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t. \quad (129)$$

При дальнейшем решении с применением метода гармонического баланса учтем следующие соотношения:

$$\dot{x} = -a_1 \omega \sin \omega t + a_2 \omega \cos \omega t; \quad (130)$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t; \quad (131)$$

$$a_1^2 + a_2^2 = A^2. \quad (132)$$

Подставляя (129) и (130) в исходное уравнение (128), приравнявая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ и пренебрегая третьей гармоникой $\cos 3\omega t$, получим

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega + \frac{3}{4}\varepsilon A^2)a_1 + 2n\omega a_2 &= (\Phi_0 / m); \\(\omega_0^2 - \omega + \frac{3}{4}\varepsilon A^2)a_2 + 2n\omega a_1 &= 0.\end{aligned}$$

Возводя в квадрат и складывая эти уравнения, находим

$$(\omega_0 - \omega^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2)^2 A^2 + 4n^2 \omega^2 A^2 - (\Phi_0 / m)^2 = 0. \quad (133)$$

Разрешенное относительно ω это уравнение представляет амплитудно-частотную характеристику системы Дуффинга

$$\omega^2 = (\omega_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 - 2n^2) \pm \sqrt{\frac{(\Phi_0 / m)^2}{A^2} - 4n^2(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 - n^2)}. \quad (134)$$

Одна из амплитудных кривых, соответствующая определенной диссипации и амплитуде вынуждающей силы, изображена на рисунке 41. Эта кривая соответствует жесткой характеристике пружины ($c_3 > 0$). Для мягкой характеристики пружины ($c_3 < 0$) наклон будет направлен влево.

Вспомним, что собственная частота системы определяется выражением $\omega_0 = \sqrt{c / m}$. Поскольку жесткость пружины c при увеличении амплитуды колебаний изменяется, то следом изменяется и собственная частота. Таким образом, в нелинейных системах собственная частота зависит от амплитуды колебаний. Именно поэтому амплитудно-частотную характеристику «гнет» вправо или влево, в зависимости от характеристики пружины.

Существенной особенностью нелинейных систем является возможность генерации нескольких периодических режимов, устойчивых и неустойчивых. На рисунке 41 устойчивым режимам соответствует сплошная линия амплитудно-частотной характеристики, пунктирная – неустойчивым.

Реализация того или иного устойчивого режима зависит от начальных условий движения. Так, если медленно увеличивать частоту возмущающей силы, амплитуда будет изменяться по линии KL (рис. 41). В точке L произойдет срыв колебаний и

при дальнейшем увеличении частоты амплитуда будет изменяться по линии MN .

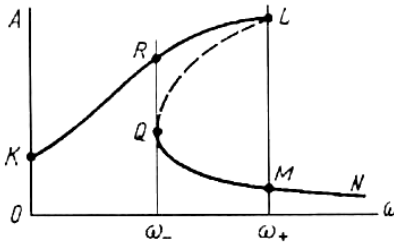


Рис. 41. Вид амплитудно-частотной характеристики при жесткой характеристике упругого элемента

При медленном уменьшении частоты амплитуда меняется по линии $NMQRK$.

В интервале частот $\omega < \omega < \omega_+$ возможны два устойчивых периодических режима. При этом система, колеблющаяся в одном из них, зачастую без всяких внешних воздействий может перейти на другой режим.

При этом перескоки могут происходить хаотически. Физики назвали это свойство **детерминированным хаосом**, поскольку он самопроизвольно генерируется в детерминированной системе.

Как уже указывалось, в нелинейных системах возможно существование гармоник с частотами, отличными от частоты возбуждения и основного колебания. Речь идет о *субгармонических* (с частотами ω/n , где $n = 2, 3, \dots$) и *супергармонических* (с частотами ωn , где $n = 2, 3, \dots$) колебаниях. Эти составляющие колебаний выявляются при использовании более тонких методов исследования.

При исследовании системы Дуффинга для основного колебания мы отбросили гармонику $\cos 3\omega t$. При ее учете получаем дополнительно супергармонические колебания с частотой 3ω . Следует однако заметить, что амплитуда этой гармоники существенно меньше амплитуды основного колебания.

Субгармонические колебания в этой же системе с частотой $\omega/3$ не малы, но происходят при достаточно большой (для жесткой характеристики), или достаточно малой (при мягкой характеристике) частоты ω вынуждающей силы.

В вибрационных технологических машинах велика диссипация энергии, за счет которой суб- и супергармонические колебания существенно подавляются. Для практических расчетов рядовых вибрационных машин достаточно учесть основное колебание с частотой ω .

Сказанное выше в отношении суб- и супергармонических колебаний указывает, казалось бы, на непреодолимые препятствия на пути их полезного использования в технологии. Тем не менее, появились устройства, в которых эти явления успешно используются.

Речь идет о поличастотных просеивающих устройствах с системой Kroosher (Израиль) (рис. 42).

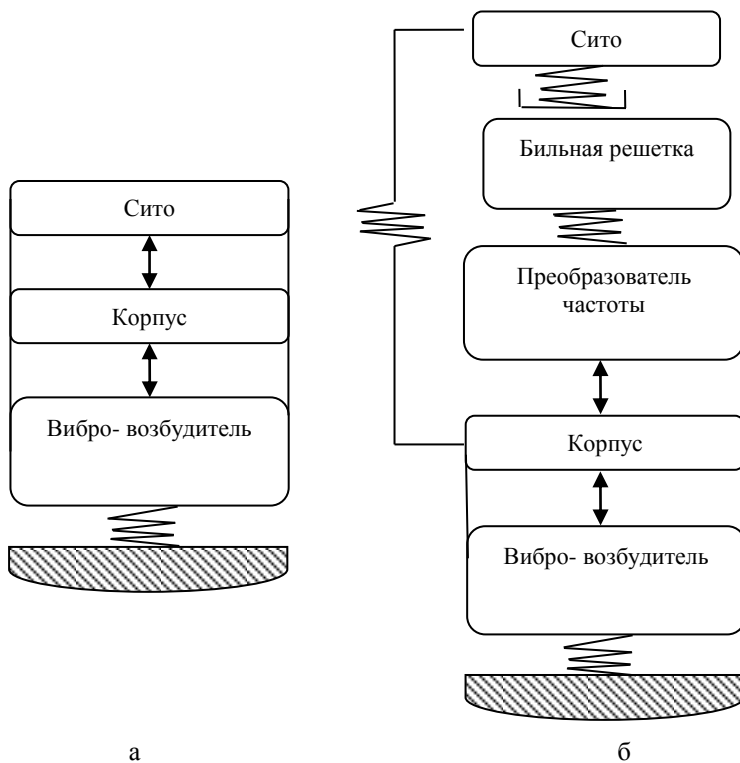


Рис. 42. Структурные схемы просеивающих машин: а – традиционная; б – многочастотная фирмы Kroosh [21]

В отличие от обычных вибрационных просеивающих устройств, данное содержит преобразователь частоты, преобразующий одночастотную вибрацию вибровозбудителя в многочастотную (поличастотную) вибрацию, передающуюся на сито.

Дело в том, что частицы, находящиеся на поверхности сита, имеют разные собственные частоты, зависящие от массы частицы, упругости участка сита, с которым в данное время соприкасается частица и т.д. Чтобы ввести в резонанс движение всех частиц, как раз и необходим широкий спектр возбуждающих частот. Такая интенсификация движения частиц приводит к повышению производительности просеивающей машины, способствует самоочистке сита или решет, улучшает качественные характеристики технологического процесса.

Конструктивная-технологическая схема одной из машин фирмы Kroosh представлена на рисунке 43.

Просеивающее сито 4 уложено на бильную решетку 5, размер отверстий которой больше размеров отверстий сита.

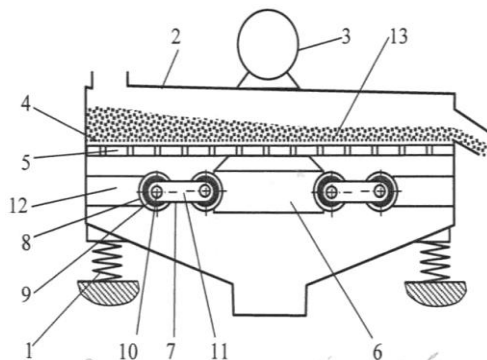


Рис. 43. Схема поличастотной просеивающей машины:

- 1 – упругая опора; 2 – корпус; 3 – вибровозбудитель (750-3000 об/мин.); 4 – сито; 5 – бильная решетка;
- 6 – активирующий элемент; 7 – упругая связь; 8 – втулка;
- 9 – эластомерное ядро; 10 – ось; 11 – планка;
- 12 – кронштейн; 13 – сырье

Преобразователь частоты содержит активирующий элемент 6, упругие нелинейные связи 7 и 9. Последние и обеспечивают генерирование многочастотных колебаний. Кроме того,

между бильной решеткой 5 и активирующим элементом 6 нет жесткой связи, поэтому здесь образуется зазор, что ведет к виброударному режиму колебаний сита.

Таким образом, во время работы машины вибровозбудитель 3 генерирует одночастотную вибрацию корпуса 2, однако к сетке подводится многочастотное виброударное воздействие. На сетке также возможно возникновение детерминированного хаоса.

Виброударный режим приводит к увеличению пиковых ускорений до 1000 g, амплитуды колебаний до 0,1-10 мм. При этом колебания на сите имеют сплошной спектр частот в диапазоне от 20 до 80 Гц (рис. 44).

Таким образом, использование суб- и супергармонических колебаний расширяет резонансную зону работы сита в сравнении с обычной просеивающей машиной.

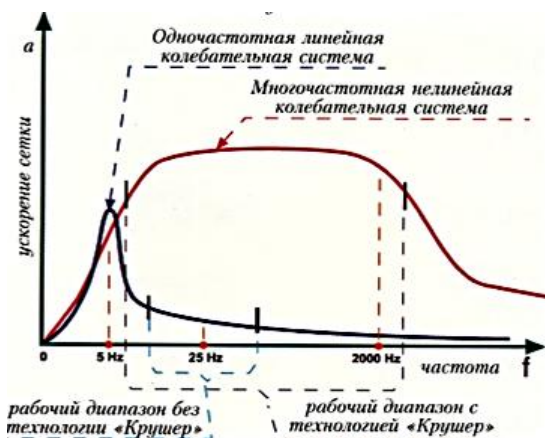


Рис. 44. Схематическое сравнение характеристик одночастотной и многочастотной просеивающих машин

1.5.2. Бигармоническое нагружение модели Дуффинга

Другим примером получения целого спектра частот является использование двух вынуждающих сил с разными частотами. Рассмотрим эти вынужденные колебания также на примере уравнения Дуффинга (128), но без учета диссипации в системе.

Для этого случая уравнение примет форму:

$$\ddot{x} + \omega_0 x + \varepsilon x^3 = \Phi_{01} \cos \omega_1 t + \Phi_{02} \cos \omega_2 t. \quad (135)$$

Применим метод малого параметра, т.е. будем разыскивать решение в виде ряда по степеням малого параметра ε .

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) \dots$$

Ограничимся двумя членами этого ряда, т.е.

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t). \quad (136)$$

Подставляя предполагаемое решение (136) в первоначальное уравнение (135), получим:

$$(\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1) + \omega_0(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon(x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 + 3\varepsilon^2 x_0 x_1^2 + \varepsilon^3 x_1^3) = \Phi_{01} \cos \omega_1 t + \Phi_{02} \cos \omega_2 t.$$

Приведем подобные члены с одинаковыми степенями ε , при этом члены со степенями ε , выше первой, опускаем. Тогда будем иметь: $(\ddot{x}_0 + \omega_0 x_0) + \varepsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0 x_1 + x_0^3) = \Phi_{01} \cos \omega_1 t + \Phi_{02} \cos \omega_2 t$.

Приравнявая члены с одинаковыми степенями ε в левой и правой частях этого выражения, получим два уравнения:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0 x_0 = \Phi_{01} \cos \omega_1 t + \Phi_{02} \cos \omega_2 t; \quad (137)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0 x_1 = -x_0^3. \quad (138)$$

Уравнение (137) называется уравнением *нулевого приближения*, или *порождающим* уравнением. Оно не содержит нелинейных членов. Его решение, в силу линейности и выполнения принципа суперпозиции, будем разыскивать в виде:

$$x_0(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (139)$$

где A_1, A_2 – амплитуды вынужденных колебаний.

Если это решение подставить в уравнение первого приближения (138), то член $-x_0^3$ примет конкретную форму.

При этом используем известные тригонометрические соотношения для преобразования степеней косинусов в первую степень. В конечном счете получим уравнение первого приближения в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0 x_1 = & - \left(\frac{3}{4} A_1^3 + \frac{3}{2} A_1 A_2^2 \right) \cos \omega_1 t + \left(\frac{3}{2} A_1^2 A_2 + \frac{3}{4} A_2^3 \right) \cdot \cos \omega_2 t - \frac{1}{4} A_1^3 \cos 3\omega_1 t - \\ & - \frac{1}{4} A_2^3 \cos 3\omega_2 t - \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \{ \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t] \} - \\ & - \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \{ \cos[(\omega_1 + 2\omega_2)t] + \cos[(\omega_1 - 2\omega_2)t] \}. \end{aligned} \quad (140)$$

Несмотря на сложный вид, это линейное неоднородное уравнение. Следовательно, в силу линейности и суперпозиции, решение этого уравнения должно содержать гармоники с частотами правой части (140): ω_1 ; ω_2 ; $3\omega_1$; $3\omega_2$; $2\omega_1 + \omega_2$; $2\omega_1 + \omega_2$; $2\omega_1 - \omega_2$; $\omega_1 + 2\omega_2$; $\omega_1 - 2\omega_2$.

Таким образом, наряду с частотами возбуждения ω_1 и ω_2 мы получили еще шесть частот, являющихся чаще всего комбинацией первых двух. Именно в этом проявилась нелинейность исходного уравнения Дуффинга.

Если теперь построить следующие приближения этого уравнения, то комбинационных частот было бы обнаружено больше.

Решение уравнения (140) не вызывает принципиальных трудностей, но мы не приводим его из-за громоздкости.

Таким образом, материал данного раздела свидетельствует о принципиальной возможности создания поличастотных вибрационных машин с бигармоническим приводом.

1.5.3. Вынужденные колебания с нелинейным сопротивлением

Характеристика некоторых нелинейных видов сопротивления была приведена на рисунке 15. Большинство из них удастся описать общей формулой

$$F(\dot{x}) = b\dot{x}|\dot{x}|^{k-1}, \quad (141)$$

где (\dot{x}) – модуль скорости.

При этом сухому трению соответствует значение $k = 0$, линейному сопротивлению $k = 1$, квадратическому (турбулентному) трению – $k = 2$.

Таким образом, для сухого (кулонова) трения записи равнозначны.

$$F = F_0 \text{sign} \dot{x} \text{ и } F = F_0 \dot{x} |\dot{x}|^{-1}.$$

Уравнение движения при произвольной зависимости силы трения от скорости запишем в виде:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + cx = \Phi_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (142)$$

Фазовый угол включен в выражение вынуждающей силы, а не перемещения, что упрощает выкладки.

Линеаризуем нелинейный член $F(\dot{x})$ исходя из рассмотренных ранее идей эквивалентной линеаризации. Поскольку здесь речь может идти лишь об активной мощности, то метод получил название *энергетического баланса*.

В соответствии с ним заменим заданную нелинейную силу $F(\dot{x})$ эквивалентной в энергетическом отношении нелинейной силой $b_0\dot{x}$.

Коэффициент b_0 , будем разыскивать из условия равенств работ, необходимых для преодоления обеих сил за период колебаний:

$$\int_0^T F(\dot{x})\dot{x}dt = \int_0^T b_0\dot{x}\dot{x}dt. \quad (143)$$

Примем, что стационарный колебательный процесс, как и в случае линейного трения, но теперь приближенно, описывается гармонической функцией

$$x = A \cos \omega t. \quad (144)$$

При этом уравнение энергетического баланса проще записывать для полупериода колебаний, поскольку скорость в это время не меняет знак. Подставляя (144) в (143), найдем

$$-\int_0^{\pi} F(-A\omega \sin \psi) A \sin \psi d\psi = \frac{\pi}{2} A\omega b_0,$$

где $\psi = \omega t$.

Следовательно, выражение для *эквивалентного коэффициента линейного трения* в самом общем виде примет вид

$$b_0 = -\frac{2 \int_0^{\pi} F(-A\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi}{\pi A\omega}. \quad (145)$$

Если силу трения $F(\dot{x})$ принять в виде (141), то числитель последнего выражения равен

$$2 \int_0^{\pi} b(-A\omega \sin \psi)^k \sin \psi d\psi = -4A^k b \omega^k \int_0^{\pi/2} \sin^{k+1} \psi d\psi.$$

Входящий сюда интеграл J представляет собой Эйлеров интеграл второго рода и выражается через гамма-функцию. Некоторые значения интеграла, в зависимости от показателя k , приведены ниже [95]:

k	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
J	1,000	0,875	$\pi/4=0,785$	0,718	$2/3=0,667$	0,624	0,589

С учетом обозначения интеграла окончательно получим

$$b_0 = \frac{4bJ}{\pi} (A\omega)^{k-1}. \quad (146)$$

Следовательно, для некоторых видов трения эквивалентный коэффициент b_0 равен:

$$\text{- сухое трение } (k = 0): b_0 = \frac{4b}{\pi A\omega}; \quad (147)$$

$$\text{- линейное трение } (k = 1): b_0 = b; \quad (148)$$

$$\text{- квадратично-вязкое } (k = 2): b_0 = \frac{8}{3} \frac{bA\omega}{\pi}. \quad (149)$$

После того, как коэффициент b_0 найден, можно воспользоваться решением для линейной системы (18, 19). Запишем выражение для амплитуды колебаний, при этом учтем, что $n = b_0/2m$

$$A = \frac{\Phi_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + [b_0(A)\omega / m]^2}}. \quad (150)$$

Здесь неизвестная амплитуда A входит не только в левую часть, но и правую его часть, так как коэффициент b_0 зависит от той же амплитуды A . В связи с этим соотношение (150) следует рассматривать не как формулу, а как уравнение для определения A .

Просто вычисляется только амплитуда $A_{рез}$ при резонансных колебаниях ($n \text{ при } \omega = \omega_0$):

$$A_{рез} = \frac{\Phi_0}{b_0(A)\omega_0} = \frac{\pi\Phi_0}{4bJ(A\omega_0)^{k-1}\omega_0} = \frac{\pi\Phi_0}{4bJA^{k-1}\omega_0^k};$$

$$A_{рез}^k = \frac{1}{\omega_0^k} \cdot \frac{\pi \Phi_0}{4bJ},$$

откуда

$$A_{рез} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt[k]{\frac{\pi \Phi_0}{4bJ}}. \quad (151)$$

При сухом трении ($k = 0$) это выражение не определено, поскольку наличие такого вида трения при $\Phi_0 > (4\pi)F_0$ не ограничивает амплитуду при резонансе и при $\omega \rightarrow \omega_0 A \rightarrow \infty$.

Для квадратично-вязкого трения ($k = 2$; $J = 2/3$) имеем:

$$A_{рез} = \frac{1.085}{\omega_0} \sqrt{\frac{\Phi_0}{b}}. \quad (152)$$

Таким образом, амплитуда A колебаний не пропорциональна амплитуде вынуждающей силы Φ_0 , как это имеет место в линейной системе.

1.5.4. Виброударные системы

Еще одним представителем нелинейных систем является системы с жесткими упорами, т. н. виброударные системы. Они делятся на системы с *односторонними* и *двухсторонними ограничителями*.

Основные свойства таких систем рассмотрим на примере динамической системы с односторонним ограничителем (рис. 45). К такой модели приводятся многие уплотняющие, измельчающие и забивающе-погружающие машины.

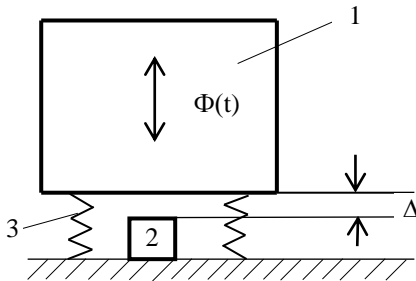


Рис. 45. Виброударная система с односторонним ограничителем:
1 – ударяющее тело; 2 – упор; 3 – поддерживающие пружины

При достаточной по величине вынуждающей силе:

$$\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t + \phi)$$

в системе возможны периодические колебания с ударом об упор в каждом периоде колебаний. При этом зазор Δ периодически полностью выбирается.

Силовая характеристика этой системы и примерный вид колебаний представлены на рисунке 46.

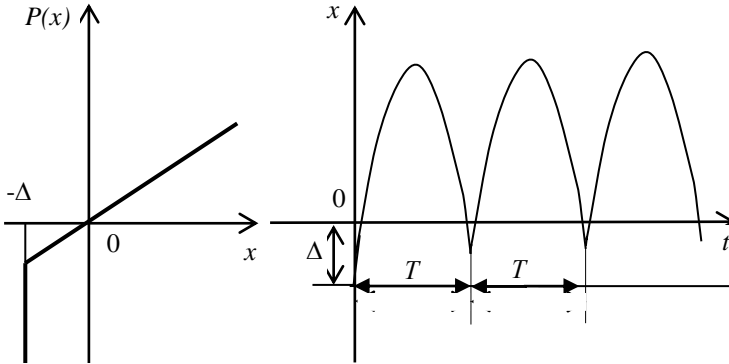


Рис. 46. Силовая характеристика (а) и примерный вид колебаний (б) в системе Русакова-Харкевича

Эта модель носит название Русакова-Харкевича, по именам ученых, впервые ее исследовавших [95].

Обратим внимание, что силовая характеристика состоит из двух линейных участков, в пределах действия которых система становится линейной. Это позволяет использовать точный метод решения, который носит название **метод приспособывания**, поскольку последовательно рассматривается ряд линейных задач, решения которых «сшиваются» в точках перелома силовой характеристики.

Примем, исходя из гипотезы Ньютона, что при ударе тела об ограничитель скорость груза мгновенно меняется, следуя соотношению

$$\dot{x}(0) = -R\dot{x}(-0), \quad (153)$$

где R – коэффициент восстановления скорости;

$\dot{x}(-0)$ – скорость непосредственно перед ударом.

Уравнение колебаний тела между двумя ударами является линейным:

$$m\ddot{x} + cx = \Phi_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (154)$$

решение которого хорошо известно

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{\Phi_0 \sin(\omega t + \phi)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Дифференцируя, находим скорость тела:

$$\dot{x} = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{\Phi_0 \omega \cos(\omega t + \phi)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (156)$$

Совмещая начало отчета времени с моментом отскока тела от упора, будем иметь начальные условия:

$$x(0) = -\Delta; \quad (157)$$

$$x(T) = x(0) = -\Delta; \quad (158)$$

$$\dot{x}(T-0) = \dot{x}(-0). \quad (159)$$

Последнее условие позволяет записать соотношение (153) по-иному:

$$x(0) = -R\dot{x}(T-0). \quad (160)$$

Таким образом, получили связь между скоростями в начале периода и в его конце (т.е. непосредственно перед следующим ударом).

Записанных условий достаточно для определения трех постоянных C_1 , C_2 , ϕ , входящих в решение (154). Эти условия приводят к следующим равенствам:

$$C_2 + \frac{\Phi_0 \sin \phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\Delta;$$

$$C_1 \sin \omega_0 T + C_2 \cos \omega_0 T + \frac{\Phi_0 \sin(\omega T + \phi)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\Delta;$$

$$C_1 \omega_0 + \frac{\Phi_0 \omega \cos \phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = -R \left[C_1 \omega_0 \cos \omega_0 T - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 T + \frac{\Phi_0 \omega \cos(\omega T + \phi)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right].$$

В этих уравнениях как раз и содержатся три неизвестные величины: постоянные C_1 и C_2 , а также начальная фаза φ вынуждающей силы. Пусть, например, $\Delta = 0$. Тогда, учитывая, что $\sin(\omega T + \varphi) = \sin \varphi$, $\cos(\omega T + \varphi) = \cos \varphi$, после решения уравнений найдем:

$$tg \phi = \frac{(1+R)}{(1-R)} ctg \frac{kT}{2} \frac{\omega}{\omega_0}; \quad C_1 = -\frac{\Phi_0 \sin \phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} tg \frac{kT}{2};$$

$$C_2 = -\frac{\Phi_0 \omega_0 \sin \phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Теперь можно записать закон движения, справедливый для интервала времени $0 < t < T$ (на других интервалах времени движение полностью повторяется):

$$x = \frac{\Phi_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t + \phi) - \sin \phi \cos \omega_0 t - tg \frac{kT}{2} \sin \phi \sin \omega_0 t \right].$$

Таким образом, найден основной виброударный режим системы Русакова-Харкевича. Более тонкие исследования показывают, что в этой системе возможно появление субгармонических режимов, которые имеют интерес для создания поличастотных систем возбуждения колебаний.

Примером виброударной системы с двухсторонними ограничителями является измельчитель фуражного зерна и подобных материалов [70] (рис. 47).

Вся виброударная система подвешена на тросовых подвесках 14. Зерно измельчается в зазоре между пассивным телом 2, выполненным в виде обращенного пассивного маятника, и вибрирующим под действием вибровозбудителя телом 4, охватывающим тело 2.

За каждый период колебаний происходит два удара: один в левом зазоре и другой в правом.

Динамика данной виброударной системы может быть рассмотрена на основе известной теории виброударного гасителя колебаний плавающего типа. Интересующегося читателя отсылаем к трудам А.Е. и А.А. Кобринских, В.И. Бабицкого, М.З. Коловского и В.Л. Рагульскене [9, 10, 101].

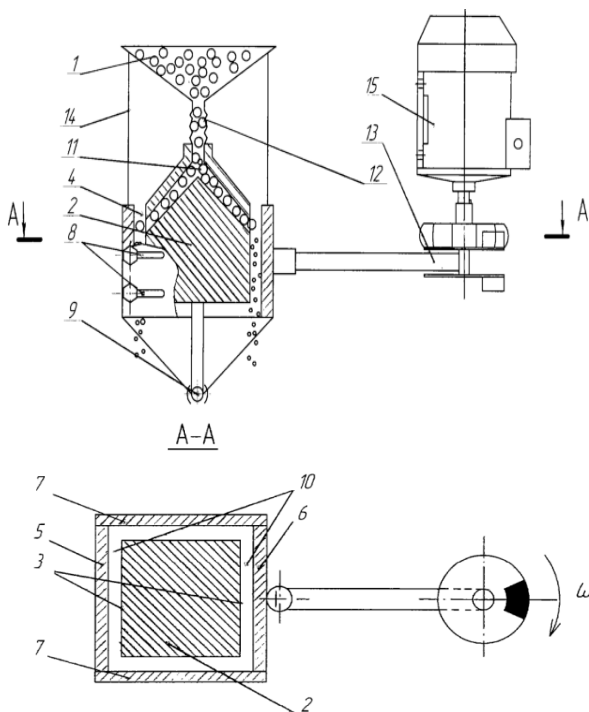


Рис. 47. Измельчитель фуражного зерна: 1 – бункер исходного сырья; 2 – пассивное дробящее тело; 3 – измельчаемый материал; 4 – вибрирующее дробящее тело; 5, 6 – подвижные (при регулировании зазора) щели дробящего тела; 7 – боковые стенки дробящего тела; 8 – регулировочные прорезы; 9 – ось; 10 – камеры измельчения; 11 – каналы для исходного зерна; 12 – гибкий зернопровод; 13 – маятниковый дебалансный вибровозбудитель; 14 – тросовые подвески; 15 – электродвигатель

1.6. Автоколебания

1.6.1. Общие сведения об автоколебательных системах

Автоколебания – это незатухающие колебания, поддерживаемые внешними источниками энергии неколебательного характера. Они возникают в нелинейной диссипативной системе, причем свойства и параметры колебаний определяются самой систе-

мой. Ученые начали изучать автоколебания в XX в., а сам термин «автоколебания» появился в 1928 г. Однако первые автоколебательные устройства были сконструированы задолго до этого. Так, гидротаран появился в конце XVIII в., когда об автоколебаниях еще не было написано ни одного научного труда. Много веков человечеству известно устройство часов, механизм которых получает энергию от гири, поднятой на высоту. Маятник часов совершает колебания, близкие к угловым синусоидальным.

По структуре и принципу действия автоколебательные системы можно разделить на два типа: *осцилляторные* и *накопительные*.

Для автоколебательной системы осцилляторного типа, схема которой показана на рисунке 48а, подвод энергии осуществляется с помощью механизма управления, условно названного выключателем. Последний действует как обратная связь между колебательной системой и источником энергии, обеспечивая ее подвод в нужный момент времени. Такая система генерирует колебания, близкие к гармоническим. Примером ее являются часы, электрический звонок, скрипичная струна и др.

Для автоколебательной системы накопительного типа, показанной на рисунке 48б, место осциллятора занимает накопитель энергии, подвод и отвод которой осуществляются с помощью переключателя энергии. Такая система генерирует **разрывные или релаксационные колебания**. Ее примером является пульсатор доильного аппарата, гидротаран, отбойный молоток, мультивибратор и др.

Резкого различия между типами автоколебательных систем нет.



Рис. 48. Структурные схемы осцилляторной (а) и накопительной (б) автоколебательной системы

Источник энергии в автоколебательной системе не имеет определенной периодичности, но его воздействие на колебательную систему играет роль как бы отрицательного трения, которое компенсирует обычное положительное трение, вносимое диссипативными силами. В уравнениях движения это отражается изменением знака перед диссипативным членом. Вспомним уравнение свободных затухающих колебаний:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 .$$

Рассмотрим теперь близкое уравнение, отличающееся лишь знаком при $b\dot{x}$

$$m\ddot{x} - b\dot{x} + cx = 0 .$$

Это уравнение раскачивающихся колебаний. Здесь отрицательное трение играет роль активной силы. А роль ограничителя (выключатель, переключатель) сводится к тому, чтобы при нарастании колебаний знак перед диссипативным членом сделать таким, чтобы он играл демпфирующую роль. Как только размах колебаний снизится, переключатель включит «отрицательное» трение и все снова повторится. Таким образом, в автоколебательных системах колебания малого размаха раскачиваются, а большого – затухают. В результате система приходит к какому-то стационарному состоянию.

В связи со сказанным, автоколебательная система состоит из трех частей (рис. 48): колебательной; источника энергии, которой компенсирует потери на трение, делает положение равновесия неустойчивым, а колебания нарастающими; некоторого ограничителя, переводящего нарастающие колебания в стационарное состояние.

Первые части системы могут быть линейными, ограничитель всегда является нелинейным. Следовательно, автоколебания всегда описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

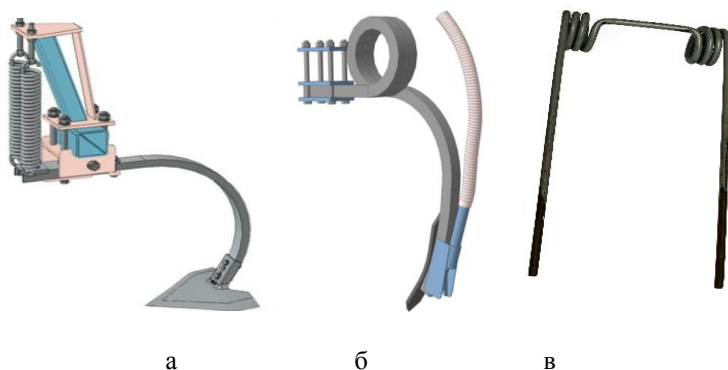
1.6.2. Автоколебательные рабочие органы почвообрабатывающих машин

Упругое крепление рабочих органов известно в культиваторах, боронах, сеялках, чизельных плугах и др. Исследователи обычно регистрируют возникновение автоколебаний таких ра-

бочих органов и снижение тягового сопротивления орудий на 15-20%. Частота автоколебаний обычно составляет 10-30 Гц, ускорения – до 8 g.

Некоторые типы автоколебательных рабочих органов приведены на рисунке 49.

Кроме снижения сопротивления, вибрирующие рабочие органы хорошо самоочищаются от пожнивных остатков и стеблей сорняков, предотвращают поломки при встрече с камнями и другими препятствиями.



*Рис. 49. Рабочие органы с упругим креплением к раме орудия:
а – лапа культиватора; б – стойка глубокорыхлителя с трубкой
для подачи сыпучих удобрений; в – зубья бороны*

Рассмотрим теорию динамического взаимодействия упруго закрепленных рабочих органов с почвенной средой на примере пальца бороны (рис. 50 а).

При движении заделки зуба со скоростью V конец зуба некоторое время удерживается почвой, зуб отгибается от вертикального положения до тех пор, пока момент упругих сил пружинящего зуба не станет равен максимальному моменту сил сопротивления почвы (рис. 50 б). После этого зуб начинает скользить по почве влево. В результате возникает относительная скорость конца зуба и почвы, момент сопротивления уменьшается, и зуб придет в положение, близкое к вертикальному.

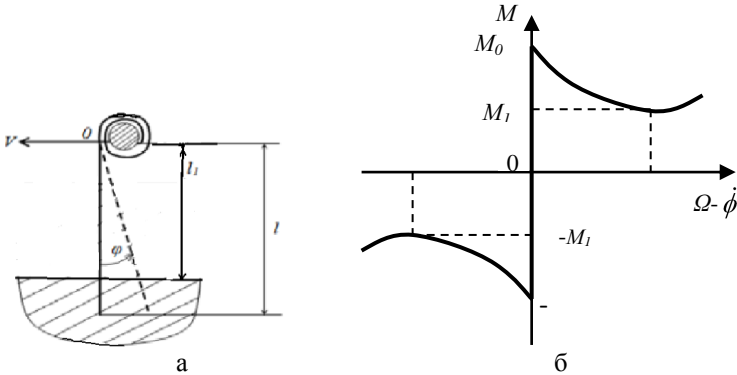


Рис. 50. Схема зуба бороны (а) и характеристика момента от сил трения зуба о почву (б)

Однако при этом момент от упругой силы зуба уменьшается, почва захватывает зуб и отгибает его опять вправо. В дальнейшем процесс повторяется, т.е. возникают автоколебания.

Составим уравнение угловых колебаний зуба относительно точки O , лежащей на вертикальной прямой, вдоль которой располагается зуб в нерабочем ненапряженном состоянии.

В этом уравнении учтем момент от сил сопротивления почвы, который зависит от относительной скорости зуба $\Omega - \dot{\phi}$ (рис. 50б), а также момент сопротивления в заделке зуба, который примем пропорциональным скорости $\dot{\phi}$. С учетом сказанного уравнение угловых колебаний зуба запишем в виде:

$$I\ddot{\phi} + k\dot{\phi} + c\phi = M(\Omega - \dot{\phi}), \quad (161)$$

где I – момент инерции зуба;

k – коэффициент сопротивления в заделке зуба;

c – коэффициент угловой жесткости зуба;

$\Omega = const$ – угловая скорость зуба в переносном движении, как результат движения заделки зуба со скоростью V .

Приближенно значение скорости Ω можно подсчитать по формуле:

$$\Omega = \frac{V}{l - 0.5(l - l_1)}, \quad (162)$$

где $l - l_1$ – длина рабочей части зуба (рис. 50).

Разложим функцию $M(\Omega - \dot{\phi})$ в ряд Тейлора вблизи значения Ω :

$$M(\Omega - \dot{\phi}) = M(\Omega) - M'(\Omega)(\Omega - \dot{\phi}) + \frac{1}{2}M''(\Omega)(\Omega - \dot{\phi})^2 + \frac{1}{6}M'''(\Omega)(\Omega - \dot{\phi})^3 + \dots \quad (162)$$

Постоянное слагаемое $M(\Omega)$ приводит к смещению положения равновесия зуба на величину $\phi_0 = \frac{M(\Omega)}{c}$.

Введем далее новую угловую координату:

$$\theta = \phi - \phi_0 = \phi - \frac{M(\Omega)}{c}. \quad (163)$$

Поэтому для малых отклонений от угла ϕ_0 справедливо уравнение (ограничимся членами ряда (162) не выше третьей степени):

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\dot{\theta} + \frac{c}{I}\theta = -\frac{M'(\Omega)}{I}\dot{\theta} + \frac{M''(\Omega)}{2I}\dot{\theta}^2 - \frac{M'''(\Omega)}{6I}\dot{\theta}^3, \quad (164)$$

Выберем угловую скорость зуба Ω на характеристике (рис. 50б) так, чтобы она являлась абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $M(\Omega)$, тогда $M'(\Omega) < 0$ и $M''(\Omega) = 0$. Кроме того, в реальных характеристиках трения $M'''(\Omega) > 0$. Собственно, эти допущения в точности соответствуют некулоновой силе трения в форме, указанной формулой (89) из раздела 1.4. Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} - (\mu - \beta\dot{\theta}^2)\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad (165)$$

где $\mu = \frac{M'(\Omega) + k}{I}$; $\beta = \frac{M'''(\Omega)}{6I}$; $\omega_0^2 = \frac{c}{I}$.

Уравнение (165) по форме является уравнением Релея.

Это уравнение, а также вытекающее из него уравнение Ван дер Поля являются эталонами теории автоколебаний и хорошо изучены. Мы остановимся только на качественном изучении уравнения (165).

При некотором малом возмущении состояние относительного покоя зуба бороны нарушается и начинаются колебания. Пока колебания малы, то большую часть периода колебаний сомножитель $\mu - \beta\dot{\theta}^2 > 0$ и знак минус перед вторым членом уравнения (165) сохраняется. «Отрицательное» трение оказыва-

ет дестабилизирующее действие и приводит к возрастанию угловых размахов колебаний зуба. Но при возрастании размахов наступает момент, когда указанный множитель меняет знак $\mu - \beta\dot{\theta}^2 < 0$. На этих интервалах времени знак при втором члене уравнения изменится на «плюс», и этот член будет оказывать демпфирующее действие на рост колебаний. В остальные промежутки времени, когда $\mu - \beta\dot{\theta}^2 > 0$, это слагаемое будет по-прежнему способствовать раскачке колебаний.

Образно описал сложившуюся ситуацию Я.Г. Пановко¹: «В условиях соперничества двух противоположных влияний раскачка колебаний будет постепенно замедляться, и движение будет неограниченно приближаться к режиму колебаний с постоянными размахами, в котором эти влияния взаимно компенсируются. Этот режим называется *установившимися автоколебаниями* [93]».

Постепенный переход колебаний зуба к установившимся автоколебаниям показан на рисунке 51а.

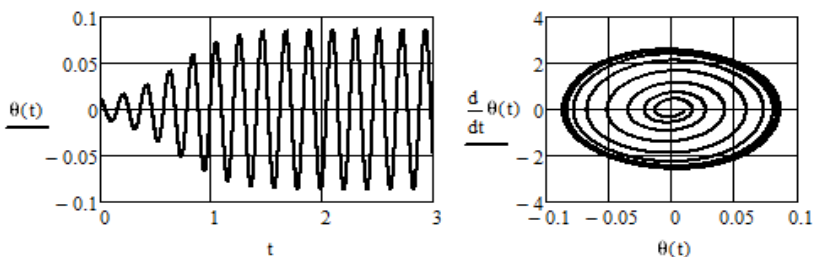


Рис. 51. Переходный процесс и установившиеся автоколебания зуба борона (а), фазовый портрет (б)

¹ **Пановко Яков Гилелевич** (1913-2002 гг.) – выдающийся ученый-механик, член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, доктор технических наук, профессор. Несколько поколений студентов технических вузов постигали сложную науку, теорию колебаний, по учебникам Я.Г. Пановко. Умер в Берлине на 90-м году жизни.

Если начальное возмущение велико, то сначала колебания будут затухать, постепенно приближаясь к тому же режиму установившихся автоколебаний, как и после малого начального возмущения.

Теория и эксперимент показывают, что рассматриваемый динамический режим устойчив, а статический режим, с отсутствием колебаний, неустойчив, т.е. физически нереализуем в данной системе.

Представленное решение (рис. 51) характеризует автоколебания осцилляторного типа.

Однако при малом моменте инерции зуба $I \rightarrow 0$ и малом линейном сопротивлении $k \rightarrow 0$ (уравнение (161) в этой же системе возможно получение разрывных (релаксационных) автоколебаний. Этот режим характерен скачкообразными перемещениями зуба в почве, при этом форма колебаний далека от синусоидальной (рис. 52).

В каждом периоде автоколебаний зуб бороны сначала отклоняется относительно медленно вправо (промежуток времени T_1). При этом энергия запасается. Затем зуб быстро перемещается влево (промежуток времени T_2), при этом вся запасенная энергия диссипируется в почве. Затем опять идет отклонение зуба, затем стремительное перемещение его влево и т.д.

Для других рабочих органов почвообрабатывающих машин получить релаксационные колебания трудно, поскольку эти рабочие органы содержат кроме стойки сосредоточенную массу в виде лапы или лемеха.

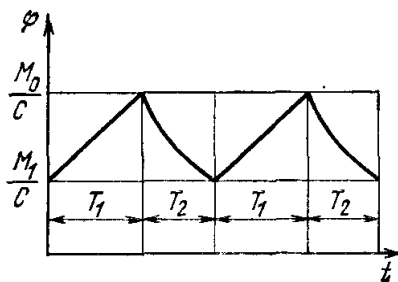


Рис. 52. Форма разрывных (релаксационных) колебаний

1.6.3. Колебания стержня на вращающихся вальцах

Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 53. На два вращающихся в противоположные стороны цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень (или пластина). Центры шкивов находятся на горизонтальной прямой. Силы трения, развиваемые в точках касания стержня со шкивами, следуют закону Кулона, т.е. пропорциональны соответствующим давлениям:

$$F = -fN, \quad (166)$$

где F – проекция силы трения на направление скорости;

f – коэффициент трения;

N – нормальное давление.

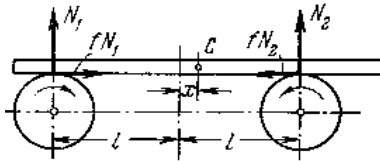


Рис. 53. Схема сил, действующих на стержень, лежащий на двух шкивах [111]

Пусть в произвольный момент времени t центр тяжести C стержня смещен на расстояние x от оси симметрии. Тогда реакции шкивов составят

$$N_1 = \frac{l-x}{2l}mg, \quad N_2 = \frac{l+x}{2l}mg,$$

где m – масса стержня, $2l$ – расстояние между центрами шкивов. Соответственно проекции сил трения будут равны:

$$F_1 = \frac{l-x}{2l}fmg, \quad F_2 = \frac{l+x}{2l}fmg,$$

где f – коэффициент трения.

Таким образом, суммарная сила трения составит:

$$F = F_1 + F_2 = -\frac{fmg}{l}x, \quad (167)$$

т.е. пропорциональна перемещению x и имеет противоположное направление. Уже здесь отчетливо видно, что в этой системе

сила трения играет несвойственную ей роль и удивительным образом преобразуется в восстанавливающую силу [94].

Продолжим решение задачи и запишем дифференциальное уравнение движения стержня в проекции на горизонтальную ось

$$-\frac{fmg}{l}x = m\ddot{x}.$$

Если обозначить

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{fg}{l}}, \quad (168)$$

то уравнение приобретает самый обычный вид дифференциального уравнения свободных незатухающих колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (169)$$

Таким образом, движение стержня будет представлять собой гармонические колебания с частотой ω_0 . Это можно сразу предсказать по виду выражения (167), которым устанавливается «упругий» характер силы трения. Любопытно, что при изменении направления вращения шкивов свойства системы резко меняются – положение равновесия (когда точка C располагается на оси симметрии) становится неустойчивым, и после любого сколь угодно малого возмущения система будет монотонно смещаться от положения равновесия. Этот случай приводит к уравнению, но со знаком минус перед вторым слагаемым.

Учитывая отсутствие колебательного источника и фактическое наличие в системе диссипативных сил, данные движения условно можно назвать автоколебательными. По виду же уравнение (169) не является автоколебательным.

1.6.4. Гидротаран как автоколебательное устройство

Гидротаран служит в качестве насоса, приводимого в действие водой и поднимающего воду на более высокий уровень, чем первоначальный (разумеется, ценою уменьшения количества поднимаемой воды).

Устройство гидравлического тарана показано схематически на рисунке 54.

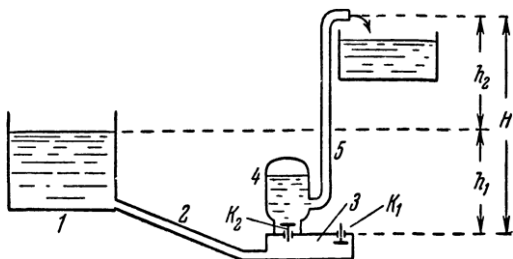


Рис. 54. Схема гидротарана

Вода из сосуда 1 по трубе 2 попадает в коробку 3, снабженную двумя клапанами: выпускным K_1 , открывающимся внутрь, и рабочим K_2 , открывающимся наружу в воздушный колпак 4. Сюда нагнетается под давлением вода, поднимающаяся затем по трубе 5 на более высокий уровень.

Действие прибора состоит в следующем. Вначале клапаны закрыты: клапан K_1 – гидростатическим давлением столба h_1 , клапан K_2 – столба H . Для запуска системы нужно нажать клапан K_1 . Вода начнет вытекать через K_1 ; под действием напора h_1 ее скорость постепенно будет увеличиваться. При этом на клапане K_1 образуется возрастающий перепад давления, который, наконец, закроет клапан, преодолев его вес. Истечение внезапно прекратится, и произойдет явление гидравлического удара, состоящее в том, что давление в камере резко повысится.

Повышение вследствие гидравлического удара давления в коробке 3 открывает клапан K_2 и вода поступает в колпак 4. Заключенный в нем воздух служит в качестве буфера, смягчающего толчки и обеспечивающего более равномерное течение воды по трубе 5. Когда волна сжатия распространится по трубе 2 до сосуда 1, она отразится оттуда в виде волны разрежения. В момент прихода этой волны в коробку клапан K_2 закроется, а клапан K_1 откроется, на этот раз автоматически, и в дальнейшем весь процесс повторится.

В реальном устройстве частота колебаний достигает порядка 100 в минуту. Высота подъема H может превышать h_1 в 20 раз.

Рабочий процесс гидротарана носит ярко выраженный релаксационный характер автоколебаний.

1.6.5. Пульсатор доильного аппарата

Рабочий процесс доильного аппарата состоит во взаимодействии доильных стаканов, коллектора и пульсатора (рис. 55). В подсосковых камерах доильных стаканов всегда поддерживается постоянный вакуум (для двухтактных доильных аппаратов). При включении доильного аппарата в работу двойной клапан пульсатора быстро поднимается, так как вакуум из магистрали передается и камеру 1_n постоянного вакуума, а в камере 4_n переменного вакуума еще будет сохраняться атмосферное давление. Мембрана прогнется вверх и поднимет клапан. При этом камера 1_n соединится с камерой 2_n и через патрубок, воздушный шланг, распределительную камеру, коллектор и воздушные трубки в межстенных камерах доильных стаканов создается вакуум. Начинается такт сосания.

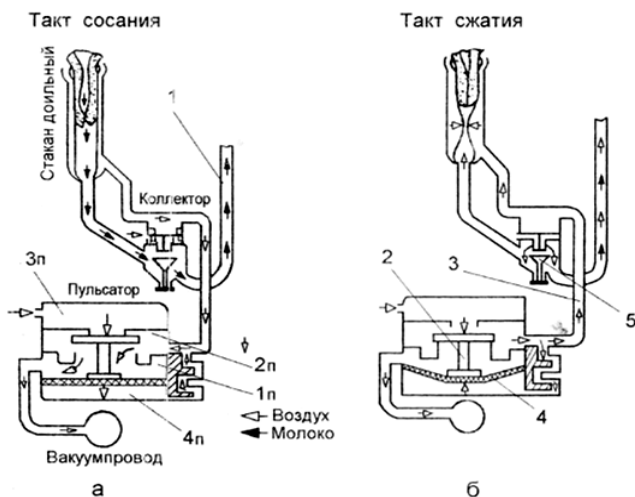


Рис. 55. Схема работы двухтактного доильного аппарата:
 а – такт сосания; б – такт сжатия; 1 – шланг молочный;
 2 – двойной клапан пульсатора; 3 – воздушный шланг от пульсатора
 к коллектору; 4 – мембрана; 5 – клапан коллектора для включения
 аппарата в работу; 1_n – камера постоянного вакуума;
 2_n , 4_n – камера переменного вакуума; 3_n – камера атмосферного давления

Одновременно воздух постепенно отсасывается через регулируемый канал и из управляющей камеры 4_n пульсатора. В результате давление воздуха на мембрану снизу уменьшается. При определенной величине вакуума в камере 4_n двойной клапан опустится под действием атмосферного давления в камеру 3_n . В нижнем положении клапан отсоединит камеру 2_n переменного вакуума от камеры 1_n и одновременно соединит ее с камерой 3_n атмосферного давления. В это время воздух пойдет в распределительную камеру коллектора, в межстенные камеры стаканов и сожмет сосковую резину. Произойдет такт сжатия, при котором вытекание молока из сосков прекратится.

Одновременно с этим воздух постепенно будет поступать через канал в управляющую камеру 4_n пульсатора и, воздействуя на мембрану, преодолеет силу, действующую на клапан сверху (со стороны атмосферы), так как рабочая площадь клапана значительно меньше площади мембраны. Клапан вновь поднимется, и в результате межстенные камеры стаканов будут соединены с вакуумной системой. Снова наступит такт сосания, и рабочий цикл повторится.

Читатель, видимо, обратил внимание на то, что пульсатор доильного аппарата представляет собой типичное автоколебательное устройство. Действительно, на входе в пульсатор со стороны вакуумпровода имеем постоянный вакуум, а на выходе получаем чередование циклов вакуума и атмосферного давления, которые, в конечном счете, периодически распространяются в межстенные камеры доильных стаканов. При этом формируются такты сосания и сжатия. Кроме того, мембрана пульсатора автоматически занимает то верхнее, то нижнее положение. Наконец, здесь мы зримо можем увидеть обратную связь в автоколебательной системе – канал, соединяющий камеры 2_n и 4_n .

Изменяя сечение канала, можно регулировать частоту колебаний мембраны, т.е. частоту смены тактов в доильном аппарате. В двухтактном доильном аппарате она составляет обычно 45-90 в минуту. Соотношение тактов сосание-сжатие поддерживается примерно на уровне 70:30 (%).

1.7. Параметрические колебания

1.7.1. Общие понятия

В системах с параметрическим возбуждением внешнее воздействие проявляется косвенно и заключается в периодическом изменении какого-либо из параметров (инерции или жесткости). Дифференциальные уравнения таких колебаний содержат периодические коэффициенты, явно зависящие от времени.

Ярким примером параметрических колебаний являются качели. Человек, находящийся на качелях, параметрически возбуждает их колебания, приседая в верхних крайних положениях и поднимаясь в нижних. Явление раскачивания системы с помощью периодического изменения одного (или нескольких) параметров системы называется *параметрическим резонансом*.

Параметрический резонанс опасен в машинах и сооружениях, поскольку возникает даже при наличии сильного демпфирования (но при ненулевых начальных условиях). Энергия для параметрического резонанса поступает от источника, который периодически изменяет параметры системы. Опасность параметрического резонанса заключается также и в том, что он осуществляется не при дискретных значениях частот (как при вынужденных колебаниях), а в некоторых диапазонах частот.

Полезное использование параметрического резонанса в технологических машинах наталкивается на трудности математического и конструкторского характера. Поэтому параметрическое возбуждение не получило пока широкого применения в вибрационной технике.

В отличие от вибротехники, в радиоэлектронике, вычислительной и лазерной технике параметрический способ возбуждения колебаний находит широкое применение.

Большую роль в изучении параметрических колебаний играет уравнение Матье:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\alpha - 2q \cos 2\tau)x = 0. \quad (170)$$

По виду уравнения Матье можно заключить, что оно описывает колебания с периодически изменяемой жесткостью восстанавливающей силы.

Решения уравнения (170) служат специальными функциями, называемые *функциями Матье*, свойства которых подробно изучены. В зависимости от значений α и q параметрические колебания могут быть ограниченными или неограниченно возрастающими (рис. 56).

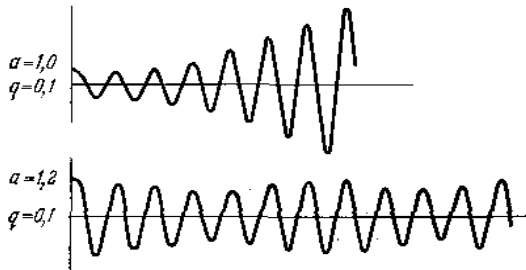


Рис. 56. Два типа решения Матье: а) неустойчивое; б) устойчивое

На этом рисунке параметр q одинаков для обоих графиков, но небольшое различие в параметре α приводит к резко различающимся режимам колебаний. Случай $\alpha = 1,0; q = 0,1$ иллюстрирует параметрический резонанс, при $\alpha = 1,2; q = 0,1$ наблюдается устойчивые стационарные колебания.

Выделение соответствующих устойчивых и неустойчивых областей дано на диаграмме Айнса-Стретта (рис. 57).

Если дифференциальное уравнение какой-либо задачи приведено к форме (170), то по конкретным значениям α и q с помощью диаграммы устойчивости можно сразу сделать заключение об устойчивости или неустойчивости системы. Это полностью освобождает от решения исходного уравнения.

Как видно из диаграммы Айнса-Стретта, области устойчивости (заштрихованы) чередуются с областями неустойчивости.

На этой диаграмме можно также проследить за влиянием частоты возбуждения ω на устойчивость колебаний. При увеличении частоты оба параметра α и q пропорционально уменьшаются. Поскольку они связаны прямо пропорциональной зависимостью $q = k\alpha$, то последовательные состояния системы

определяются точками на пунктирной линии (рис. 57), проходящей через начало координат.

Диаграмма устойчивости симметрична относительно оси α , поэтому знак q в уравнении (170) не имеет значения.

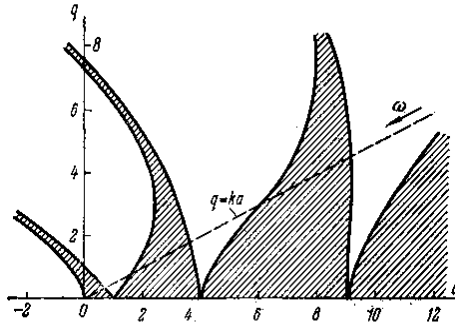


Рис. 57. Диаграмма Айнса-Стретта

1.7.2. Устойчивость верхнего положения маятника

Диаграмму Айнса-Стретта можно применить к известному примеру с устойчивостью верхнего положения математического маятника (маятника Стефенсона-Капицы) (рис. 58).

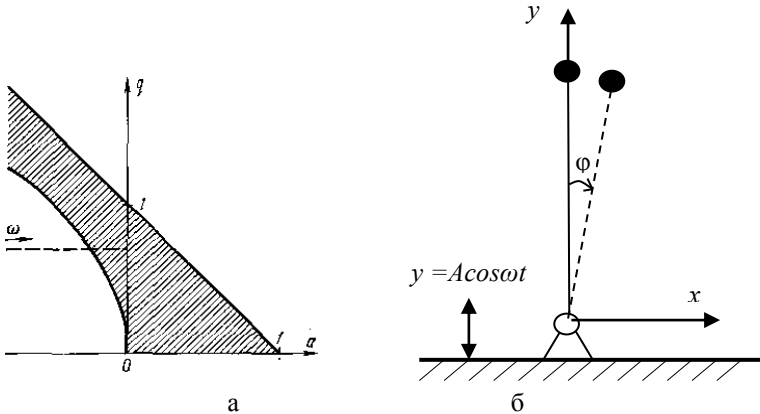


Рис. 58. а – опрокинутый маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса; б – фрагмент диаграммы Айнса-Стретта

При неподвижной опоре верхнее положение маятника, как мы знаем из повседневного опыта, неустойчиво. Однако вибрации основания маятника придают этому положению устойчивость. Более того, если отклонить маятник в сторону, то он начинает качаться так же, как в нижнем положении без вибраций.

Будем рассматривать малые отклонения маятника от вертикали, для которых $\sin \phi \approx \phi$.

На маятник в верхнем положении действуют моменты:

1) момент силы тяжести:

$$M_T = mgl\phi,$$

где m – масса маятника;

l – его длина;

ϕ – угол отклонения.

2) момент от переносной силы инерции:

$$M_{II} = -mA\omega^2 l \phi \cos \omega t$$

Дифференциальное уравнение колебаний маятника запишем в виде: $ml^2\ddot{\phi} = mgl\phi - mA\omega^2 l \phi \cos \omega t$,

$$\text{или } \ddot{\phi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t\right) \phi = 0. \quad (171)$$

Получили по форме уравнение свободных малых колебаний маятника, но с периодическим коэффициентом при возвращающей силе.

Это уравнение можно привести к виду (170), если положить

$$2\tau = \omega t; \quad \alpha = -\frac{4g}{\omega^2 l}; \quad q = -\frac{2A}{l}.$$

Обратим внимание на отрицательный знак величины α . Как видно из фрагмента карты устойчивости (рис. 58 б), устойчивость может быть и при отрицательном знаке α , что и отличает систему опрокинутого маятника.

При небольших амплитудах A колебаний точки подвеса, когда $0 < |q| < 1$, устойчивость верхнего положения достигается

при удовлетворении неравенства $|a| < \frac{q^2}{2}$.

При учете обозначений (172) это условие принимает вид:

$$\omega > \frac{\sqrt{2gl}}{A} \text{ или} \quad (173)$$

$$\omega A > \sqrt{2gl}. \quad (174)$$

Последнее неравенство можно интерпретировать так: чтобы верхнее положение маятника было устойчивым, амплитудное значение ωA скорости вибраций должно быть больше скорости $\sqrt{2gl}$ свободного падения тела с высоты, равной длине маятника.

Академик П.Л. Капица объяснил эти результаты появлением при вибрациях стойки маятника дополнительного (вибрационного) момента, удерживающего маятник в верхнем положении [61].

Полезного использования в технологии рассмотренного выше явления неизвестно, хотя оно также (при многочисленности опрокинутых маятников) может быть применено для образования динамических поверхностей.

Подобный эффект повышения устойчивости известен в динамике упругих систем, на который впервые указал академик В.Н. Челомей: колебательная составляющая продольной силы стабилизирует упругую систему, которая неустойчива при действии только статической составляющей [31].

1.7.3. Параметрическое возбуждение вибромашин на основе роторно-бегунковых систем

Обнадеживающие результаты по полезному использованию параметрических колебаний в технологии получены В.И. Антиповым на основе предложенных им роторно-бегунковых систем (своего рода параметрических вибровозбудителей). Устройства достаточно просты конструктивно и имеют габариты, соизмеримые с габаритами обычного дебалансного вибровозбудителя [6].

В отличие от инерционного (дебалансного) вибровозбудителя с вращательным движением инерционного элемента, параметрический вибровозбудитель – это резонансный вибровозбу-

датель с колебательным движением инерционных элементов. В таком вибровозбудителе реализуются многократные комбинационные резонансы.

Динамическая модель этого устройства показана на рисунке 59.

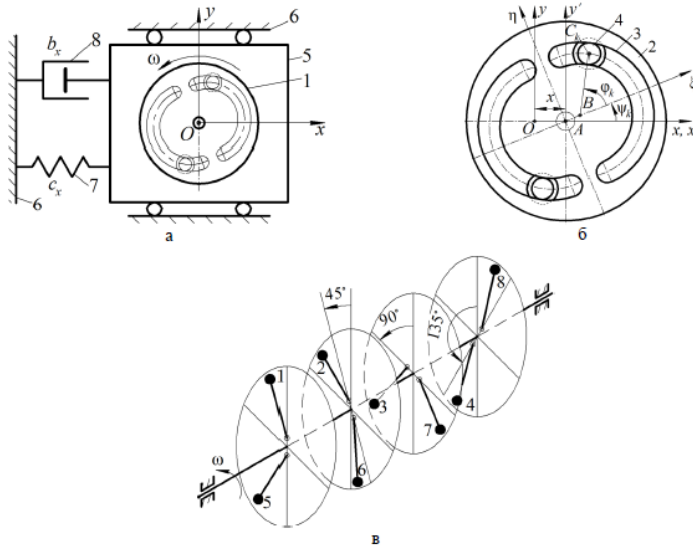


Рис. 59. Динамическая модель вибрационного устройства с параметрическим вибровозбудителем

Ротор 1 этой системы состоит из набора отдельных одинаковых уравновешенных дисков 2 (рис. 59). В каждом диске имеется пара незамкнутых беговых дорожек 3 кругового профиля, которые расположены симметрично относительно двух взаимно-перпендикулярных его диаметров, а их центры смещены от оси вращения ротора в диаметрально противоположных направлениях на одинаковые расстояния $AB = l$. На беговых дорожках размещены одинаковые уравновешенные тела качения (маятники) 4 массой m каждый с возможностью обкатки. Диски соединяются между собой в единую конструкцию так, что беговые дорожки одной пары повернуты вокруг оси ротора на угол $\gamma_0 = \pi / s$ относительно другой, где s – четное число). Ротор

содержит $N = 2s$ тел качения (маятников), расположенных попарно в параллельных плоскостях (рис. 59в)

Ротор массой m_0 в собранном виде жестко закрепляется на приводном валу, который посредством подшипников устанавливается на рабочем органе 5 массой M_0 . Рабочий орган связан с основанием 6 упругими элементами 7. Демпфер 8 моделирует технологическую нагрузку.

Система координат $Ax'y'z'$ с началом в центре масс ротора движется поступательно относительно неподвижной системы $Oxyz$. При этом плоскость $Ax'y'$ расположена в плоскости вращения ротора. В положении статического равновесия оси этих координатных систем совпадают. Приводной вал получает вращение от электродвигателя, вынесенного из колебательной системы машины. При этом на движение тел качения накладываются нестационарные (реономные) связи за счет равномерного вращения ротора с угловой скоростью ω , что предполагает наличие идеального источника энергии. Это предложение на самом деле не столь существенно, поскольку ротор с развитым моментом инерции выполняет роль маховика и аккумулятора кинетической энергии.

Каждое тело качения совершает сложное движение: переносное с угловой скоростью ω вращения ротора и относительное при планетарной обкатке по беговой дорожке.

Равномерное вращение ротора порождает периодическое изменение во времени *инертных свойств колебательной системы с периодом $2\pi/\omega$* . При этом тела качения образуют подсистему N одинаковых осцилляторов качения (маятников 4) с осями обкатки в центрах кривизны беговых дорожек и одинаковыми парциальными собственными частотами $\omega_{01} = \nu\omega$ во вращающейся вместе с ротором системе координат

$$\nu = \sqrt{\frac{m\rho_c\ell}{J}} - \text{безразмерный параметр,}$$

где m – масса тела качения;

$$\rho_c = BC_k; \ell = AB;$$

J – приведенный момент инерции тела качения относительно оси обкатки.

Вторая подсистема – это корпус (рабочий орган 5) на упругой связи с парциальной собственной частотой $\omega_{02} = \sqrt{c/M}$. При настройке $\omega = \omega_{01} + \omega_{02}$, $\nu = 0.25$ и выполнении некоторого порогового условия самовозбуждается многократный комбинационный параметрический резонанс с возникновением коллективного взаимодействия указанных выше подсистем.

Существенно, что с помощью легких маятников удается раскачать массивный рабочий орган.

Особенностью данного вибровозбудителя является также самосинхронизация (самонастраивание) колебаний осцилляторов качения (маятников).

Одним из достоинств параметрического вибровозбудителя является возможность снижения частоты колебаний рабочего органа по отношению к частоте вращения приводного электродвигателя.

По сравнению с дебалансными вибровозбудителями расширяется резонансная зона, а также увеличивается амплитуда колебаний при повышении диссипативной нагрузки на рабочем органе.

На рисунке 60 представлены три амплитудно-частотные характеристики данной вибрационной машины при различных сочетаниях параметров устройства.

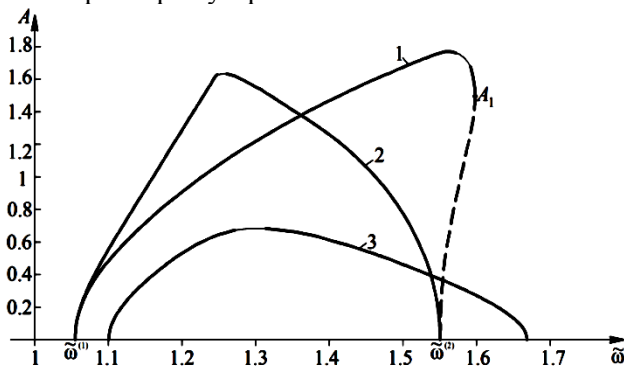


Рис. 60. Примерные резонансные кривые параметрической машины (пунктиром показана неустойчивая ветвь характеристики 1);

$$\tilde{\omega} = \omega / \omega_{02}$$

Из рисунка 60 следует, что резонансные кривые не имеют характерного максимума, присущего колебательным системам при резонансе вынужденных колебаний. Обнаруживается эффект расширения резонансной зоны.

Приводной двигатель при запуске параметрической вибромашины преодолевает только момент сил трения в подшипниках, разгоняясь в режиме холостого хода. Это позволяет использовать приводной двигатель меньшей мощности и снизить энергозатраты машины в целом.

В настоящее время В.И. Антиповым и его учениками созданы эффективные транспортные и измельчающие машины с резонансным параметрическим приводом.

1.8. Самосинхронизация неуравновешенных роторов и родственные явления

1.8.1. Общие сведения

Явление самосинхронизации механических вибровозбудителей состоит в том, что два или более не связанных между собой ротора вибровозбудителя, приводимых во вращение от независимых асинхронных электродвигателей и размещенных на общем рабочем органе (несущем теле или системе несущих тел), вращаются с одинаковыми по абсолютной величине или кратными средними угловыми скоростями, причем между роторами устанавливаются определенные фазовые соотношения. Согласованное синхронное вращение нескольких вибровозбудителей и наличие определенных сдвигов фаз между ними в этом случае обеспечивается без дополнительных синхронизирующих средств благодаря колебаниям тел, на которых установлены вибровозбудители, т.е., в силу внутренних свойств самой колебательной системы. При этом синхронность вращения роторов возбудителей возникает, несмотря на различие параметров, характеризующих возбудители, и различие между их парциальными угловыми скоростями.

Явление самосинхронизации было открыто в СССР в 1947 г. в Ленинградском НИИ «Механобр». В настоящее время это явление хорошо изучено и широко используется в вибрационной технике как в России, так и за рубежом.

Основной вклад в исследование самосинхронизации внес И.И. Блехман; некоторые его результаты воспроизведены в данном разделе.

Раньше вращение неуравновешенных роторов в вибрационных машинах согласовывалось лишь путем установки между ними жестких кинематических связей в виде зубчатых зацеплений, цепных передач и т.п. (рис. 61а). Результатом становились значительный шум и быстрый износ, сопровождающие работу зубчатой или цепной передачи, из-за наличия знакопеременных или пульсирующих нагрузок. Кроме того, кинематический способ синхронизации сдерживал развитие вибрационной техники, поскольку не мог быть целесообразно применен во многих практически важных случаях, например при значительных расстояниях между вибровозбудителями. При использовании самосинхронизации кинематические связи между роторами оказываются излишними (рис. 61б).

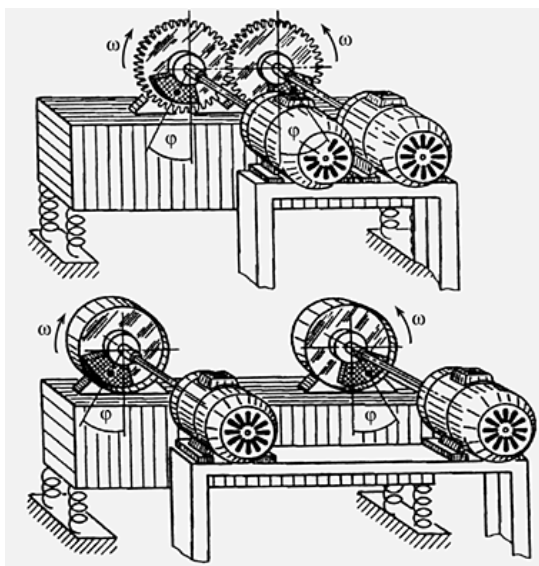


Рис. 61. Возможности использования самосинхронизации роторов:
а – старый способ согласования вращения роторов вибровозбудителей
для получения направленных колебаний;
б – новый способ достижения той же цели
(зубчатое зацепление излишне)

1.8.2. Самосинхронизация дебалансных вибровозбудителей

Большинство особенностей постановки и решения задач о самосинхронизации механических возбудителей, а также многие закономерности ее проявления могут быть выявлены на простейшей системе – два дебалансных возбудителя на несущем теле с одной степенью свободы (рис. 62). Несущее тело *1* (вибрирующий рабочий орган) считается твердым телом, которое может перемещаться вдоль фиксированного направления *x*. С неподвижным основанием *2* несущее тело связано системой упругих жесткостью *c* и демпфирующих элементов с коэффициентом вязкого сопротивления *b*. На нем установлено два дебалансных вибровозбудителя (неуравновешенных ротора) *3*, приводимых во вращение независимыми асинхронными электродвигателями *4*. Оси роторов возбудителей перпендикулярны плоскости, параллельно которой происходит движение несущего тела. Считаем, что массы m_1 и m_2 дебалансов расположены на расстоянии ε_1 и ε_2 от осей вращения.

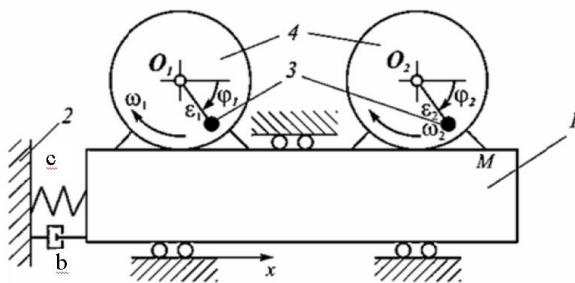


Рис. 62. Схема колебательной системы

В большинстве исследований по вынужденным колебаниям предполагается, что валы вибровозбудителей вращаются строго равномерно, а колебания несущего тела никак не отражаются на вращении дебалансов, т.е. обратная связь игнорируется. При изучении многих вопросов такая упрощенная постановка задачи является вполне обоснованной. При рассмотрении же вопросов синхронизации вибровозбудителей *нельзя игнорировать наличие связи между колебательными и вращательными*

ми координатами системы, ибо как раз наличие этих связей предопределяет самосинхронизацию.

Как мы увидим далее, условие равномерного вращения дебалансных валов удовлетворяется лишь в среднем за период колебаний.

В частности, в уравнениях движения дебалансов необходимо учитывать моменты от переносных сил инерции $m_1 \varepsilon_1 \ddot{x} \sin \varphi_1$ и $m_2 \varepsilon_2 \ddot{x} \sin \varphi_2$. Сама переносная сила инерции является знакопеременной и действует на оси вибровозбудителей по горизонтали.

Вибрация опор дебалансных валов приводит к неравномерности вращения дебалансов, поэтому моменты от центробежных сил мы должны записывать в виде $m_1 \varepsilon_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1$ и $m_2 \varepsilon_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2$.

Наконец, неравномерное вращение дебалансов приводит к появлению угловых ускорений $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$. Реактивные моменты от соответствующих сил инерции также действуют на несущее тело и составят величины $m_1 \varepsilon_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1$ и $m_2 \varepsilon_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2$.

Пусть для определенности роторы вращаются в одну сторону, а парциальные частоты таковы, что $\omega_1 > \omega_2$.

Дифференциальные уравнения движения системы запишем в виде

$$I_i \ddot{\varphi}_i + k_i \dot{\varphi}_i = L_i(\dot{\varphi}_i) + m_i \varepsilon_i (\ddot{x} \sin \varphi_i + g \cos \varphi_i), \quad i=1,2; \quad (175)$$

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + cx = \sum_{i=1}^2 m_i \varepsilon_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i), \quad (176)$$

где x – координата несущего тела;

M – общая масса несущего тела;

φ_i – угол поворота ротора i -го вибровозбудителя;

m_i, ε_i, I_i – соответственно, масса i -го возбудителя, его эксцентриситет и момент инерции относительно оси вращения;

$L(\varphi_i)$ – вращающий момент i -го двигателя;

$k_i \dot{\varphi}_i$ – момент сил сопротивления вращению i -го дебалансного вала;

g – ускорение свободного падения.

Первые два уравнения описывают вращение каждого из вибровозбудителей. Третье уравнение является уравнением поступательного движения несущего тела вдоль оси x под действием периодических вынуждающих сил, генерируемых обоими вибровозбудителями.

Будем интересоваться приближенными решениями системы уравнений (175)-(176), которые выполняются лишь в среднем за период колебаний. Предположим, что рассматриваемые движения системы могут быть представлены в виде

$$\phi_i = \omega t + \alpha_i \quad (177)$$

$$x = x(t, \omega t), \quad (178)$$

где $\omega = \omega(t)$ – некоторая синхронная скорость вращения дебалансных валов, причем $\omega_1 > \omega > \omega_2$;

x – быстрая функция времени; является 2π -периодической по $\tau = \omega t$ и её среднее значение за период равно 0.

Очевидно, что (177) не является точным решением. Мы как бы постулируем, что вращение дебалансов является близким к равномерному. Следовательно, решение (177) должно выполняться в среднем за период колебаний.

Из формулы (175) следует, что при наших предположениях:

$$\langle \dot{\phi}_i \rangle = \omega; \quad \langle \ddot{\phi}_i \rangle = 0. \quad (179)$$

Тогда уравнение (176) можно записать в виде

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \sum_{i=1}^2 m_i \varepsilon_i \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i). \quad (180)$$

Это обычное линейное уравнение вынужденных колебаний. Для движения системы вдали от резонанса можно также считать малой силу трения $b\dot{x}$ по сравнению с другими силами. Тогда решение для стационарных колебаний несущего тела может быть записано в виде:

$$x = B \sum_{i=1}^2 \Phi_{oi} \cos(\omega t + \alpha_i); \quad (181)$$

$$\ddot{x} = -B\omega^2 \sum_{i=1}^2 \Phi_{oi} \cos(\omega t + \alpha_i), \quad (182)$$

где обозначено:

$$B = \frac{1}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}; \quad \omega_0^2 = \frac{c_x}{M}; \quad \Phi_{oi} = m_i \varepsilon_i \omega^2. \quad (183)$$

Усредним за период колебаний каждый из членов уравнения (175). Начнем с правой части:

$$\langle g \cos \phi_i \rangle = \frac{1}{2\pi} g \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \alpha_i) d(\omega t) = 0; \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \langle \ddot{x} \sin \phi_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x} \sin(\omega t + \alpha_1) d(\omega t) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} B\omega^2 \int_0^{2\pi} [\Phi_{01} \cos(\omega t + \alpha_1) + \Phi_{02} \cos(\omega t + \alpha_2)] \sin(\omega t + \alpha_1) d(\omega t). \end{aligned}$$

При дальнейшем вычислении учтем что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \alpha_1) \sin(\omega t + \alpha_1) d(\omega t) = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \alpha_2) \sin(\omega t + \alpha_1) d(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Тогда

$$\langle \ddot{x} \sin \phi_1 \rangle = -B\omega^2 \Phi_{01} \frac{1}{2} \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Соответственно,

$$\langle \ddot{x} \sin \phi_2 \rangle = B\omega^2 \Phi_{02} \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Усредненный момент от переносной силы инерции, действующий на первый ротор

$$W_1 = m_1 \varepsilon_1 \langle \ddot{x} \sin \phi \rangle = -\frac{1}{2} B \Phi_{01} \Phi_{02} \sin(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (185)$$

Соответственно, такой же момент, но с обратным знаком, действует на второй ротор

$$W_2 = \frac{1}{2} B \Phi_{01} \Phi_{02} \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Моменты от переносных сил инерции W_1 и W_2 называют также *вибрационными*. Они одинаковы по абсолютной величине, но имеют разные знаки. Следовательно, их сумма равна 0. Отсюда следует важнейший вывод: *вибрационные моменты не изменяют общего баланса энергии в системе, а лишь перераспределяют подводимую к системе энергию между отдельными вибровозбудителями*. При этом подгоняется «медленный» и тормозится «быстрый» вибровозбудитель как раз таким образом, чтобы обеспечивалось их синхронное вращение.

Запишем усредненное уравнение (175) с учетом соотношений (179), (184) и (185):

$$k_1 \omega = L_1(\omega) - W_1; \quad (186)$$

$$k_2 \omega = L_2(\omega) + W_2. \quad (187)$$

Складывая правые и левые части этих выражений придем к уравнению

$$\omega(k_1 + k_2) = L_1(\omega) + L_2(\omega). \quad (188)$$

Если бы вибровозбудители были установлены на жесткой платформе, то они бы работали независимо друг от друга и были бы верны следующие соотношения:

$$k_1 \omega_1 = L_1(\omega_1);$$

$$k_2 \omega_2 = L_2(\omega_2).$$

Складывая левые и правые части, будем иметь уравнение

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = L_1(\omega_1) + L_2(\omega_2). \quad (189)$$

Сопоставляя левые и правые части уравнений (189) и (188), получим

$$\frac{k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2}{\omega(k_1 + k_2)} = \frac{L_1(\omega_1) + L_2(\omega_2)}{L_1(\omega) + L_2(\omega)}. \quad (190)$$

Обратим внимание на правую часть этого соотношения. Как следует из сказанного выше, сумма моментов L_1 и L_2 при синхронизации не меняется, хотя один из них уменьшается, а другой настолько же увеличивается. Следовательно, правая часть уравнения (190) равна 1.

Отсюда имеем формулу для определения угловой скорости синхронного вращения вибровозбудителей

$$\omega = \frac{k_1\omega_1 + k_2\omega_2}{k_1 + k_2}. \quad (191)$$

Таким образом, *угловая скорость ω равна средневзвешенному значению от парциальных скоростей ω_i , причем роль весовых коэффициентов играют коэффициенты сопротивления (демпфирования) k_i .*

Теория и эксперименты показывают, что при самосинхронизации одинаковых вибровозбудителей возможны следующие разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1$:

1) $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha \approx 0$ – т.н. *синфазное вращение дебалансных валов;*

2) $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha \approx \pi$ – *противофазное вращение.*

На вопрос, какой из этих режимов устойчив (т.е. физически реализуем), отвечает *критерий Блехмана-Лаврова*, утверждающий, что устойчивым стационарным режимом соответствует минимум средней за период $2\pi / \omega$ разности D кинетической и потенциальной энергии несущего тела, т.е.

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T - \Pi) d(\omega t) \rightarrow \min, \quad (192)$$

где T – кинетическая энергия;

Π – потенциальная энергия.

При вычислении T и Π можно пользоваться усредненными значениями перемещений, скоростей и т.д.

Полученное выражение для D обязательно содержит разность фаз $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Поэтому минимум можно найти, взяв производную $\partial D / \partial \alpha$ и приравняв ее нулю, т.е.

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = -P(\alpha, \omega, \omega_0) = 0. \quad (193)$$

При работе вибровозбудителей в далеко зарезонансном режиме возможно игнорирование потенциальной энергии (поскольку пружины, поддерживающие несущее тело, имеют малую жесткость ($c \approx 0$)) и вычислять в критерии D нужно только кинетическую энергию.

Для примера, подсчитаем критерий D для системы, изображенной на рисунке 62 при прежних предположениях:

- а) несущее тело имеет одну степень свободы;
- б) дебалансные валы вращаются в одинаковом направлении.

Дополнительно примем, что параметры вибровозбудителей одинаковы, т.е. $m_1 = m_2 = m$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Тогда из (181) имеем:

$$x = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{m\varepsilon}{M} [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_2)]; \quad (194)$$

$$\dot{x} = -\frac{\omega^3}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{m\varepsilon}{M} [\sin(\omega t + \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_2)]. \quad (195)$$

Теперь имеются все данные для образования выражений для кинетической $T = M\dot{x}^2 / 2$ и потенциальной $\Pi = cx^2 / 2$ энергии, а также вычисления D по выражению (192):

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{M\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2} \right) d(\omega t) = \frac{(m\varepsilon)^2}{2M} \frac{\omega^4}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \alpha + C, \quad (196)$$

где $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Без вычисления производной $\partial D / \partial \alpha$ видно, что минимуму D отвечает два режима:

$$1) \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \text{ если } \omega < \omega_0; \quad (197)$$

$$2) \alpha_2 - \alpha_1 = \pi, \text{ если } \omega > \omega_0. \quad (198)$$

Таким образом, в дорезонансном $\omega \ll \omega_0$ режиме наблюдается синфазный режим, при котором происходит

суммирование вынуждающих сил вибровозбудителей и колебания несущего тела вдоль оси x .

В зарезонансном режиме ($\omega > \omega_0$) дебалансные валы вращаются в противофазе ($\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$), и вынуждающие силы взаимно «гасят» друг друга. Несущее тело при этом остается неподвижным.

В случае $\omega_1 \neq \omega_2$ (т.е. когда парциальные частоты вибровозбудителей не совпадают) устойчивые фазировки роторов будут отличаться от синфазной или противофазной.

В этом случае реализуется один из двух режимов:

$(\alpha_2 - \alpha_1)_1 = \alpha_c \neq 0$ – условно синфазное вращение;

$(\alpha_2 - \alpha_2)_2 = \alpha_n = \pi + \alpha_c$ – условно противофазное вращение.

В каждом конкретном случае необходимо тщательное исследование условий самосинхронизации, которые зависят как от факторов, рассмотренных выше, так и от числа степеней свободы колебательной системы, числа вибровозбудителей, геометрических и инерционных параметров системы, относительных направлений вращения роторов вибровозбудителей.

Препятствует самосинхронизации высокая диссипация в системе, а также большая разность парциальных частот вибровозбудителей.

Явление самосинхронизации широко используется в вибрационной технике для получения направленных, круговых, угловых и винтовых колебаний тела. Созданы новые классы вибрационных машин: зерноочистительных, конвейеров, питателей, грохотов, дробилок, мельниц и др.

В качестве примера на рисунке 3 приведена просеивающая машина с шестью степенями свободы, корпус которой совершает винтовые гармонические колебания относительно вертикальной оси.

Роторы вибровозбудителей вращаются при этом в одинаковом направлении.

Зерноочистительная машина с поступательными колебаниями, направленными под углом к горизонту, изображена на рисунке 3 Введения. Роторы дебалансных вибровозбудителей

здесь вращаются в разные стороны, что и позволяет получить направленные колебания.

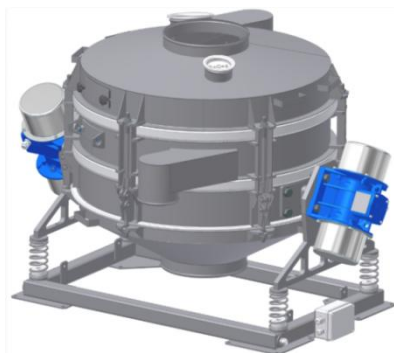


Рис. 63. Просеивающая машина с самосинхронизирующимся дебалансными вибровозбудителями

Подобный вибровозбудитель применяется в конструкции грохота для сортировки клубней картофеля (рис. 64).

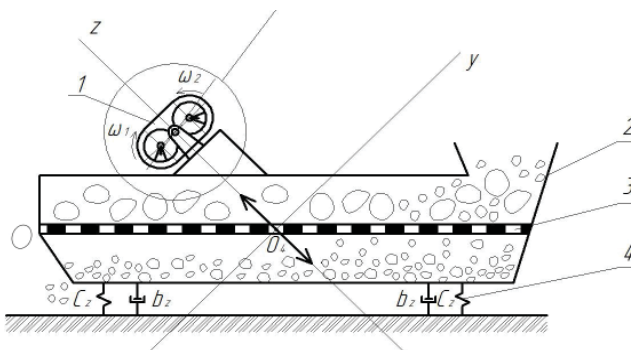


Рис. 64. Схема грохота с самосинхронизирующимся приводом конструкции КАТУ им. С. Сейфуллина (Казахстан)

Центр масс двухвального дебалансного вибровозбудителя 1 шарнирно соединен с коробом 2. Клубни картофеля могут перемещаться по эластичной поверхности решетки 3. Вся система опирается на упругие элементы с коэффициентом жесткости C_z и сопротивлением b_z .

Грохот работает следующим образом. Двухвальный центробежный вибровозбудитель 1 возбуждает направленные вынуждающие колебания, изменяющиеся по гармоническому закону, которые передаются коробу 2. Направление равнодействующей вынуждающих сил проходит через центр масс системы (точку O), так что траектория колебаний короба 2 в установленном режиме представляет собой наклонную прямую. Клубни картофеля через бункер поступают на вибрационную эластичную поверхность решетки 3. Благодаря эффекту вибротранспортирования клубни картофеля сортируются по мере перемещения по эластичной поверхности решетки 3. В конструкции короба 2 могут быть предусмотрены решетки двух уровней в соответствии с требованиями технологии. Особенность шарнирного соединения вибровозбудителя 1 с коробом 2 позволяет легко выполнить условия, необходимые для устойчивого режима синхронных движений роторов вибровозбудителя. Тем самым исключается принудительная синхронизация роторов.

1.8.3. Вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора

Самосинхронизация иногда столь сильна, что когда выключают электродвигатель одного из вибровозбудителей, он продолжает вращение в том синхронном режиме, который был до выключения электродвигателя.

Однако на оставшийся в работе электродвигатель ложится двойная нагрузка: напрямую он вращает свой дебалансный вал и косвенно, через вибрацию несущего тела, второй дебалансный вал. Поскольку мы рассматриваем асинхронный электродвигатель, то под действием повышенной нагрузки он снизит свою скорость, которая станет новой синхронной ω_* .

Пусть в схеме (рис. 62) мы отключили электродвигатель правого вибровозбудителя, тогда, в силу сказанного, при установленном режиме будем иметь соотношение

$$k_1\omega_* + k_2\omega_* = L(\omega_*), \text{ или} \quad (199)$$

$$R(\omega_*) = L(\omega_*), \quad (200)$$

где $R(\omega_*) = k\omega_*$, $k = k_1 + k_2$.

Графическое решение уравнения (200) представлено на рисунке 65.

Уравнение (187) для изменившихся условий мы должны записать в виде

$$k_2\omega_* = W_2(\omega_*), \quad (201)$$

а выражение для вибационного момента примет вид

$$W_2(\omega_*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_*^4}{M(\omega_0^2 - \omega_*^2)} \cdot m_1 \varepsilon_1 m_2 \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)_{*}. \quad (202)$$

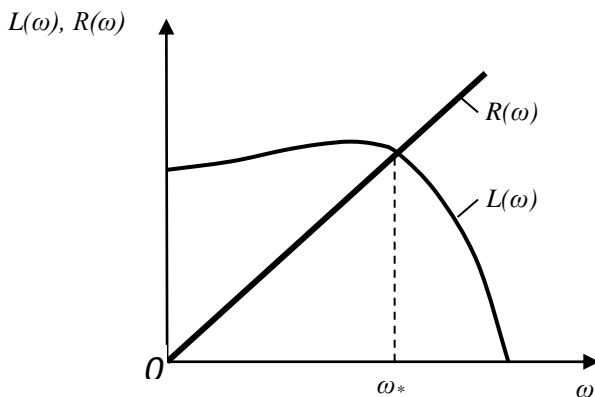


Рис. 65. Пересечение характеристик $L(\omega)$ и $R(\omega)$ дает новую синхронную частоту вращения вибровозбудителей

Разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ также несколько изменяется, что отмечено введением звездочки.

Введем далее обозначение

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_*^4}{M(\omega_0^2 - \omega_*^2)} m_1 \varepsilon_1 m_2 \varepsilon_2. \quad (203)$$

Тогда уравнение (201) можно переписать в виде:

$$k_2\omega_* = Q \sin(\alpha_2 - \alpha_1)_{*}. \quad (204)$$

Отсюда получаем условие, при котором возможно поддержание вращения неуравновешенного ротора

$$\frac{k_2 \omega_*}{Q} < 1. \quad (205)$$

Условие (205) сводится к тому, что *вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора возможно, если модуль вибрационного момента больше момента сопротивления, действующего на данный ротор.*

При вибрационном поддержании вращения неуравновешенного ротора может быть передана большая мощность. К сожалению, *эффект поддержания вращения неуравновешенного ротора не является самовозбуждающимся.* Ротор необходимо сначала разогнать при помощи внешнего источника до скорости вращения активного ротора и затем, после отключения внешнего источника, неуравновешенный ротор продолжит свое вращение. Исключения составляют случаи очень большой амплитуды колебаний, соизмеримой с ε . Реальные амплитуды вибрационных машин на порядок ниже.

Видимо, возможно провести разгон пассивного вибровозбудителя при интенсивных колебаниях несущего тела, сопровождающих переход системы через резонанс. Но для этого нужно, чтобы активный вибровозбудитель «застрял» на некоторое время в зоне резонанса (эффект Зоммерфельда). Это время как раз требуется для разгона пассивного вибровозбудителя. Теоретических и экспериментальных исследований по этому вопросу пока нет.

1.8.4. Самосинхронизация планетарных вибровозбудителей

В ряде вибрационных машин, наряду с обычными вибровозбудителями, приводимыми от двигателей, используются тела качения (ролики, шарики, конусы, кольца), которые, будучи лишены двигателей, в рабочем режиме обкатываются синхронно с вращением обычных, например дебалансных вибровозбудителей (рис. 66).

При вибрациях корпуса тела качения обкатывают внутреннюю или внешнюю поверхность и оказывают действие, подобное тому, что имеет место в дебалансных вибровозбудите-

лях. Но подобные механизмы используют не как вибровозбудители, а в качестве рабочих органов вибрационных машин.

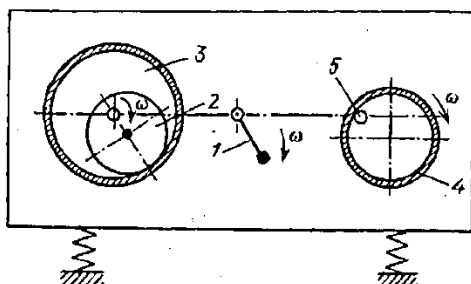


Рис. 66. Синхронная обкатка тел качения.

- 1 – дебалансный вибровозбудитель;
2 – ролик, обкатывающийся в цилиндрической полости 3;
4 – кольцо, обкатывающееся на оси 5

Если обратиться опять к рисунку 66, то дебалансный вибровозбудитель создает близкие к круговым поступательные колебания корпуса с частотой ω , и при определенных условиях центры тяжести обкатывающихся тел движутся по окружностям вокруг центров полости или оси (стержня) со средней частотой $\langle \dot{\phi} \rangle = \pm (p/q)\omega$, где p и q – целые положительные взаимно простые числа.

Такие движения называются *планетарными*. Они могут возбуждаться только при зазоре Δ в рабочих органах, меньшего некоторого критического Δ_* [16].

$$\Delta_* = \frac{\sqrt{1+f^2}}{f} A, \quad (206)$$

где f – коэффициент сопротивления перекачиванию ($f = 0,1 \dots 0,4$);

A – эффективная амплитуда колебаний.

Для наиболее распространенных эллиптических колебаний последняя определяется по формуле

$$A = 0,5(a+v), \quad (207)$$

где a , v – полуоси эллиптической траектории колебаний оси планетарного вибровозбудителя.

При выполнении условия:

$$\Delta < \Delta^* \quad (208)$$

основной режим обкатки, как правило, самоуставляется, специальной раскрутки не требуется. Поэтому у данного эффекта более «счастливая судьба», чем у эффекта вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора, установленного в подшипниках. Эффект планетарной обкатки нашел многочисленные применения в вибрационной технике.

Рассмотрим только два примера. Надутый В.П. и Ягтюков В.Ф. (Украина) предложили новую конструкцию валкового вибрационного классификатора [81].

Общая компоновка валков и инерционного привода классификатора показана на рисунке 67 с фрагментом взаимодействия вращающихся в одну сторону валков с классифицируемой массой.

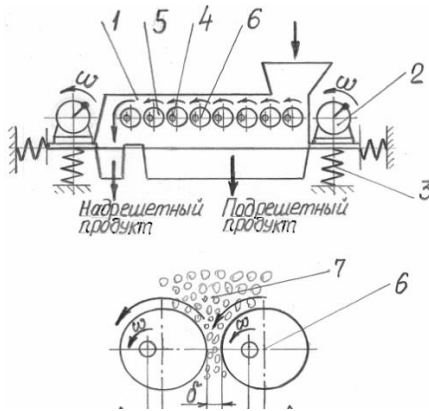


Рис. 67. Схема валкового вибрационного классификатора: 1 – корпус; 2 – инерционный (дебалансный) вибровозбудитель; 3 – упругие связи; 4 – эксцентриситет валков; 5 – рабочие валки; 6 – оси валков; 7 – фрагмент взаимодействия валков с классифицируемой массой

В корпусе 1 на равных расстояниях расположены закрепленные оси 6, на которых свободно посажены валки 5, выполненные в виде труб. Под действием самосинхронизирующихся вибровозбудителей 2 корпус и оси совершают эллиптические колебания. При этом в движение приводятся валки, которые перекатываются по осям.

Такой классификатор эффективен при сырье повышенной влажности, склонном к налипанию и комковатости, а также при обезвоживании перерабатываемого продукта.

Другим важным примером является промышленная мельница вибрационно-роликового типа МВР-0,4. Она имеет помольную камеру диаметром 400 мм, опирающуюся на пружины (рис. 68). Приводом такой мельницы является пара самосинхронизирующихся дебалансных вибровозбудителя, расположенных симметрично с обеих сторон помольной камеры. Измельчение происходит при обкатывании ролика по внутренней поверхности помольной камеры.

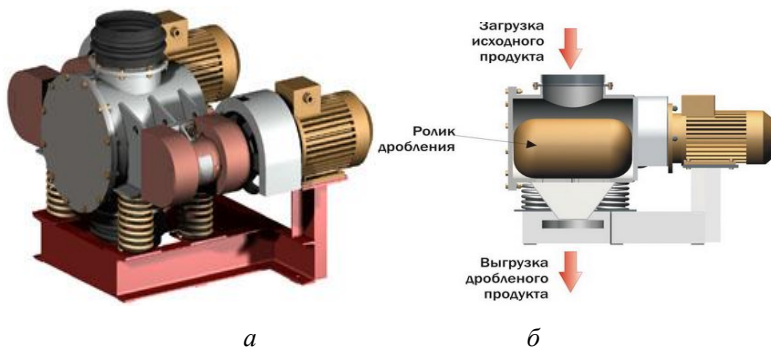


Рис. 68. Мельница вибрационно-роликовая (МВР-0,4):
а – общий вид; б – схема, поясняющая принцип действия

Дробилки подобного принципа действия различной производительности, но с вертикальной осью вращения, разработаны ОАО «Механобр-Техника» (г. Санкт-Петербург).

2. ЭФФЕКТ ВИБРАЦИОННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ

2.1. Модели безотрывного вибрационного перемещения частицы

2.1.1. Общие замечания

Под эффектом вибрационного перемещения понимается возникновение направленного в среднем движения частиц и тел под действием ненаправленных в среднем вибрационных (колебательных) воздействий [15].

Этим термином обозначается большая совокупность процессов, зачастую существенно не похожих друг на друга. Сюда, например, относятся процессы транспортирования твердых и сыпучих тел, их сепарация, разрыхление, уплотнение и т.д.

Огромное количество исследователей и изобретателей развивали это направление. Особые заслуги принадлежат И.И. Блехману, П.М. Василенко¹, П.М. Заике, Г.Д. Терскову², Р.Ф. Нагаеву, И.Ф. Гончаревичу [15, 28, 40, 54, 80, 109].

Основные закономерности вибрационного перемещения могут быть изучены на простых моделях динамического поведения материальной частицы на вибрирующей шероховатой поверхности. Дело в том, что вибрационное перемещение – это чисто нелинейный эффект, обусловленный действием сухого

¹ **Василенко Петр Мефодиевич** (1900-1999 гг.) – советский ученый в области сельскохозяйственной механики, действительный член ВАСХНИЛ (с 1956 г). Работал в учебных и научно-исследовательских институтах Украины. Основные труды посвящены разработке теории движения частиц с.-х. материалов по фрикционным поверхностям с.-х. машин.

² **Терсков Георгий Дмитриевич** (1904-1958 гг.) – канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой сельскохозяйственных машин Челябинского института механизации и электрификации сельского хозяйства (ЧИМЭСХ). Крупный ученый в области теории и расчета сельскохозяйственных машин.

(кулонова) трения. Шероховатая поверхность как раз и обладает признаками такого трения.

Конкретные формы проявления вибрационного перемещения многообразны и могут маскироваться другими факторами.

Рассмотренные ниже математические модели вибрационного перемещения позволяют изучить основные свойства и закономерности рассматриваемого эффекта. Их применение для более сложных, но идентичных по физической природе процессов зачастую сводятся лишь к установлению новых коэффициентов при прежних дифференциальных уравнениях.

Особое значение данная теория имеет для многочисленных вибрационных машин, обрабатывающих сыпучие материалы. Хотя в машине материал находится в виде слоя определенной толщины, но при определенных условиях движение слоя может моделироваться одиночной частицей. По заключению И.И. Блехмана, при сравнительно небольшой толщине слоя (не более 20-30 среднего размера частицы и не слишком интенсивной вибрации ($A\omega^2 \leq 10g$; $20c^{-1} < \omega < 300c^{-1}$)), допустимо считать, что слой колеблется как единое целое, и его движение можно рассматривать как движение материальной точки (частицы).

Большинство задач вибрационного перемещения эффективно решаются на основе использования метода прямого разделения движений, изложенного в п. 1.4.5.

2.1.2. Частица на вибрирующей плоской горизонтальной поверхности

Начнем изложение с простейшей задачи динамического поведения плоской материальной частицы, находящейся на вибрирующей в своей плоскости горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 69).

Будем изучать движение частицы относительно вибрирующей поверхности. Пусть $x_1O_1y_1$ – неподвижная система осей, а xOy – система осей, жестко связанных с вибрирующей платформой, имеющей шероховатую поверхность. Оси x и y параллельны осям x_1 и y_1 . Будем предполагать, что платформа вибрирует по гармоническому закону, тогда абсолютная координата любой точки платформы определится выражением $x_1 = A \sin \omega t + x_1(0)$.

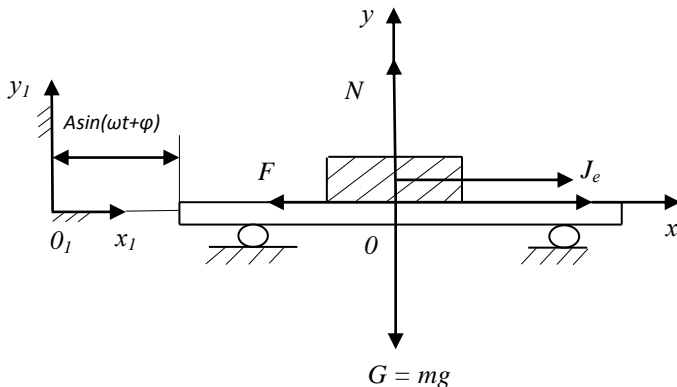


Рис. 69. Частица на вибрирующей платформе

Ускорение какой-либо точки платформы не связано с начальной координатой $x_{1(0)}$

$$\ddot{x}_1 = -A\omega^2 \sin \omega t . \quad (209)$$

Соответственно, переносная сила инерции $-m\ddot{x}_1$, которую мы должны будем включить в уравнение относительного движения, составит:

$$J_e = mA\omega^2 \sin \omega t , \quad (210)$$

где m – масса частицы.

В проекции на ось x действует сила трения. При относительном движении (т.е. при $\dot{x} \neq 0$) она определяется законом Кулона:

$$F = \begin{cases} -mgf & \text{при } \dot{x} > 0 \\ +mgf & \text{при } \dot{x} < 0, \end{cases}$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Сила трения в сокращенной записи

$$F = mgf \operatorname{sign} \dot{x} . \quad (211)$$

С учетом перечисленных сил дифференциальное уравнение относительного движения частицы запишем в виде:

$$m\ddot{x} + mgf \operatorname{sign} \dot{x} = mA\omega^2 \sin \omega t . \quad (212)$$

Очевидно, что при низкой интенсивности вибраций, когда $mA\omega^2 < mgf$ проскальзывания частицы относительно плоскости быть не может. Такие проскальзывания возможны при $mA\omega^2 > mgf$.

Сокращая на m и приводя к безразмерному виду переменные в соответствии с равенствами

$$x_* = \frac{x}{A}, \quad \dot{x}_* = \frac{\dot{x}}{A\omega}, \quad \ddot{x}_* = \frac{\ddot{x}}{A\omega^2}, \quad \tau = \omega t, \quad z = \frac{gf}{A\omega^2}, \quad (213)$$

уравнение (212) перепишем в следующем эквивалентном виде

$$\ddot{x}_* + z \operatorname{sign}(\dot{x}_*) = \sin \tau, \quad (214)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega t$.

Уравнение (212) содержит существенно нелинейный член $z \operatorname{sign}(\dot{x}_*)$. В принципе на этапах $\dot{x}_* > 0$ и $\dot{x}_* < 0$ уравнение (212) может быть представлено двумя линейными уравнениями, которые могут быть решены и состыкованы методом припасовывания. Но громоздкость решений, обусловленных появлением трансцендентных алгебраических уравнений, стимулирует поиск приближенных, но более простых решений.

В связи со сказанным, можно провести линеаризацию нелинейного члена на основе энергетического баланса (раздел 1.5.3), т.е. совершить переход:

$$z \operatorname{sign}(\dot{x}_*) \rightarrow b_* \dot{x}_*, \quad (215)$$

где b_* – коэффициент линеаризации.

В указанном разделе такая линеаризация проведена, и мы воспользуемся готовым результатом

$$b = \frac{4z}{\pi a \omega}, \quad (216)$$

где a – полуразмах (амплитуда) относительных проскальзываний частицы и платформы.

Переходя к относительной амплитуде скорости: $\frac{a\omega}{A\omega} = a_*$,

$$\text{получим } b_* = \frac{4z}{\pi a_*}. \quad (217)$$

Таким образом, линеаризованное уравнение примет вид

$$\ddot{x}_* + b_* \dot{x}_* = \sin \tau . \quad (218)$$

Это линейное уравнение вынужденных колебаний без возвращающей силы.

Решение его известно

$$x_* = a_* \sin(\tau - \phi) ; \quad (219)$$

$$a_* = \frac{1}{\sqrt{1 + b_*^2}} ; \quad (220)$$

$$\phi = \operatorname{arctg}(b_*), \quad (221)$$

где ϕ – фаза отставания колебаний частицы относительно колебаний плоскости.

Если в (220) вместо b_* подставить его значение из (216), то, решив уравнение, получим формулу для подсчета безразмерного полуразмаха колебаний частицы

$$a_* = \sqrt{1 - \left(\frac{4z}{\pi}\right)^2} . \quad (222)$$

Возвращаясь к размерным переменным, будем иметь формулы:

$$a = A \sqrt{1 - \left(\frac{4z}{\pi}\right)^2} ; \quad (223)$$

$$x = a \sin(\omega t - \phi) ; \quad (224)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{4z}{\sqrt{\pi^2 - (4z)^2}} \right] . \quad (225)$$

Таким образом, при условии

$$\left(\frac{4z}{\pi}\right)^2 < 1 \quad (226)$$

частица в относительном движении копирует движение плоскости, но с уменьшенным размахом колебаний и отставанием по фазе на угол ϕ .

Полуразмах тем меньше, чем больше показатель z , т.е. полуразмах зависит от отношения сил трения и переносной силы инерции.

При отсутствии трения (т.е. при $z = 0$), имеем $a = A$, т.е. амплитуда колебаний частицы в относительном движении равна амплитуде колебаний плоскости. При этом в абсолютном движении частица неподвижна, а плоскость под ней совершает исходные колебания с амплитудой A .

Полученное решение сравним с численным решением исходного дифференциального уравнения (218). На рисунке 70 показаны зависимости безразмерного полуразмаха колебаний частицы a^* от параметра z , полученные указанными двумя методами. Как видно, в диапазоне изменения $z=0...0,75$, который характерен для работы абсолютного большинства вибрационных технологических машин, приближенное аналитическое решение показывает хорошее качественное и удовлетворительное количественное совпадение с численным решением. Диапазон по $z=0,75-1,00$ характеризуется длительными остановками частицы в своих крайних положениях и негармоническим характером колебаний, поэтому приближенным решением практически не описывается.

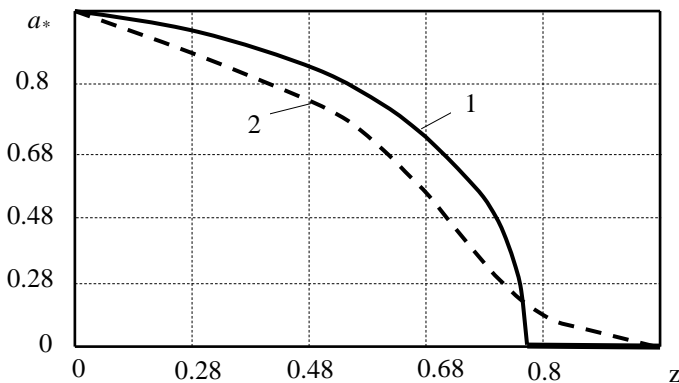


Рис. 70. Зависимость безразмерного полуразмаха колебаний от параметра z : 1 – аналитическое приближенное решение; 2 – численное решение исходного дифференциального уравнения

Таким образом, применение метода энергетического баланса привело к приемлемому решению, представленному формулами (223)-(225).

В рассматриваемом случае направленного в среднем перемещения частицы нет. Частица в относительном движении колеблется около некоторого среднего положения.

Такие режимы иногда используются в технологии, например, при периодической сепарации сыпучего продукта.

При рассмотрении данного вопроса мы принимали, что силы трения (коэффициенты трения) в прямом и обратном направлении равны, т.е. $f_+ = f_-$. Представим теперь ситуацию, что $f_+ \neq f_-$. Такой случай возможен, если шероховатая плоскость имеет ворс, наклоненный в одну сторону. Возможна и другая ситуация, когда такую анизотропию по трению имеет тело, в частности рыба с ее чешуйчатой поверхностью.

В этом случае при симметричных колебаниях плоскости относительное проскальзывание частицы или тела будет меньше в том направлении, где коэффициент трения больше (возможно, что в этом направлении проскальзывания вообще нет). В конечном случае это приводит к направленному в среднем движению в одном направлении. Эта ситуация очевидна, и может быть проанализирована при введении осредненной за период силы трения $\langle F \rangle$

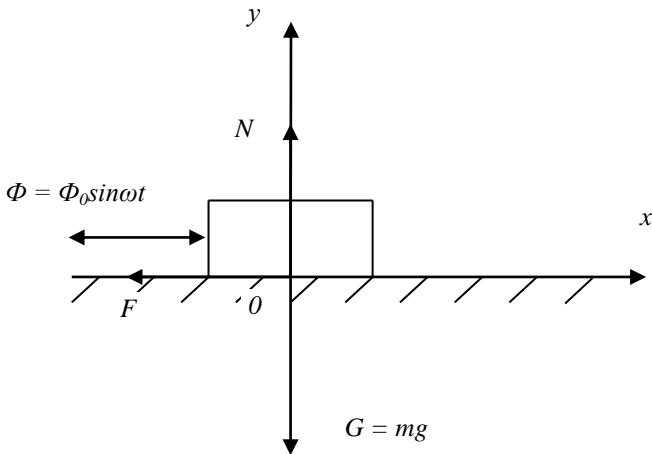
$$\langle F \rangle = \frac{1}{T}(-mgf_+ \cdot \frac{T}{2} + mgf_- \cdot \frac{T}{2}) = \frac{1}{2}mg(f_- - f_+), \quad (227)$$

где T – период колебаний ($T = \frac{2\pi}{\omega}$).

Как видно, в среднем за период сила трения не равна нулю, что и обуславливает появление направленного в среднем перемещения частицы.

Такого же направленного движения частицы можно добиваться при асимметричном законе колебаний платформы (применяя, например, кулачковый механизм в качестве вибровозбудителя).

Изложенная выше теория полностью применима и в том случае, если шероховатая поверхность неподвижна, а находящееся на ней тело подвержено действию гармонической силы (рис. 71).



$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t . \quad (228)$$

Рис. 71. Тело на шероховатой поверхности под действием гармонической силы

В данном случае переносная сила инерции, фигурируемая в изложенной выше теории, должна быть заменена силой (228).

Динамическая схема (рис. 71) также позволяет добиться направленного в среднем движения тела, если сила Φ или сила F становятся несимметричными (анизотропия этих сил). На этом свойстве основано действие различных конструкций виброходов (вибророботов, инерциодов).

2.1.3. Частица на вибрирующей поверхности при действии дополнительной постоянной силы

Раздел начнем с элементарного анализа. Пусть некоторое тело 1 протаскивается с постоянной скоростью U (например, на жесткой сцепке) по вибрирующей по закону $x = A \sin \omega t$ платформе 2. Направления скорости U и оси x совпадают. Требуется определить сопротивление, преодолеваемое тяговым органом, протаскивающим тело (рис. 72).

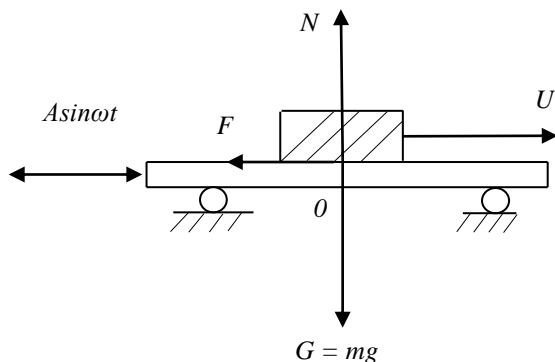


Рис. 72. Схема, поясняющая преобразование сухого трения в вязкое при продольных вибрациях

Если бы платформа была неподвижна, то тяговый орган преодолевал сопротивление – полную силу сухого трения F , возникающую между платформой 2 и перемещаемым телом 1. При вибрациях дело обстоит иначе.

Относительная скорость тела и платформы определяется из выражения

$$u = U + A\omega \cos \omega t, \quad (229)$$

откуда можно заключить, что при $U > A\omega$ характер движения тела относительно платформы является пульсирующим, а при $U < A\omega$ имеет место скольжение тела относительно платформы вперед и назад. Интерес представляет именно второй тип движения, поскольку в определенные промежутки времени платформа обгоняет движение тела, и сила трения F для тягово-го органа превращается из силы сопротивления в движущую силу, поскольку (при возможности рекуперации) энергия течет от вибромеханизма платформы к двигателю тягового механизма. Ситуация схожа с балансом сил сопротивления при автоколебаниях, где введен даже термин «отрицательное трение». «Отрицательное трение» не является сопротивлением в обычном смысле, но поскольку характеризуется тем же членом дифференциального уравнения, что и обычное трение (но с обратным знаком), то это дает некоторое основание для введения этого термина.

На рисунке 73 силам сухого трения на отдельных этапах движения как раз присвоены знаки «+» и «-» в соответствии со сказанным выше.

Среднее за период колебаний значение силы трения (как сопротивления для тягового механизма) составит (рис. 73)

$$F_U = \frac{\omega}{2\pi} (F t_g - F t_n), \quad (230)$$

где t_g и t_n – промежутки времени скольжения тела вперед и назад относительно платформы.

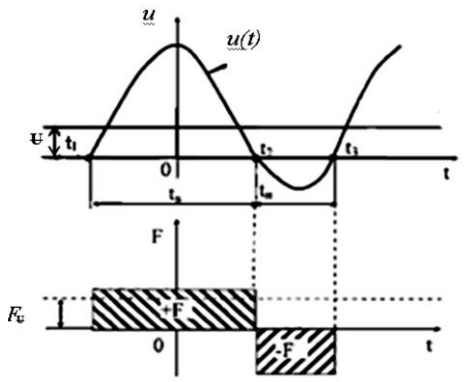


Рис. 73. Совмещенный график скоростей и сил трения при продольных вибрациях

Нетрудно подсчитать, что

$$t_g = t_2 - t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos\left(-\frac{U}{A\omega}\right); \quad (230 \text{ а})$$

$$t_n = t_3 - t_2 = \frac{2}{\omega} \arccos\left(-\frac{U}{A\omega}\right) + \frac{2\pi}{\omega}.$$

Представляя эти выражения в (230), находим, что

$$F_U = \begin{cases} F \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{U}{A\omega} & \text{при } 1 > \frac{U}{A\omega} > 0 \\ F & \frac{U}{A\omega} \geq 1 \end{cases}. \quad (231)$$

Трансформированную силу трения F_U в технической литературе называют по-разному: вибропреобразованной, линеаризованной и так далее.

Из выражения (231) можно заключить, что при $U = 0$ значение преобразованной силы также будет нулевым. В то же время при увеличении скорости U протягивания тела величина F_U монотонно возрастает (рис. 74), что является признаком вязкого трения. Значение $U_* = A\omega$ является критической скоростью протягивания тела, поскольку при $U > U_*$ преобразования сил сухого трения не происходит, и тяговый орган преодолевает полную силу трения F .

Таков вкратце механизм перераспределения сил трения при продольных вибрациях. В реальном существовании вязкой характеристики сопротивления от скорости можно убедиться, проводя опыты со шлифовальной машинкой с вибрирующей насадкой. При медленном перемещении машинки сопротивление не чувствуется, но оно возрастает при увеличении скорости поступательного перемещения.

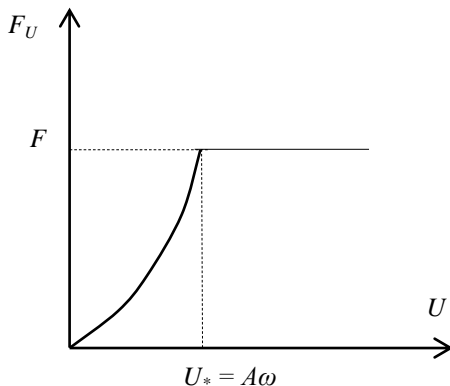


Рис. 74. *Линеаризация сил сухого трения в отношении движения тела со скоростью U*

Линеаризация сил сухого трения при вибрациях является основой создания многих технологических процессов, о чем мы еще убедимся не раз в этой книге.

Перейдем теперь к рассмотрению практически важного случая динамически заданных движений. Рассмотрим схему поведения частицы на вибрирующей плоскости, когда действует дополнительная сила T (тянущая, подталкивающая) (рис. 75).

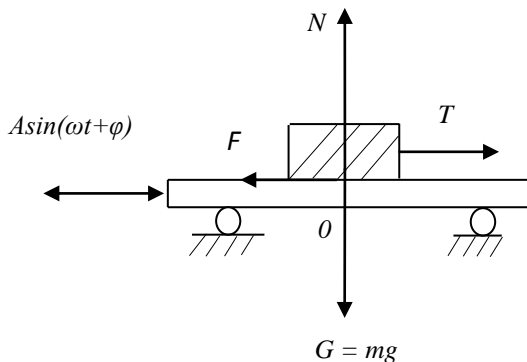


Рис. 75. Частица на вибрирующей плоской поверхности при действии силы T

Сила T может появиться при действии направленного воздушного потока, подпоре со стороны соседних частиц или в случае небольшого наклона поверхности.

Основной вопрос, который мы должны выяснить, – возможно ли направленное движение частицы при $T \ll F$. При не-вибрирующей платформе, очевидно, никакого движения в этом случае происходить не может. Оно появляется лишь при $T > F$.

Движение материальной частицы относительно вибрирующей плоскости для случая $T < F$ запишем в форме:

$$m\ddot{x} + mg \operatorname{sign} \dot{x} - T = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (232)$$

Здесь фазовый сдвиг ϕ включен в переносную силу инерции, а не в решение уравнения, что облегчает выкладки.

Применим для решения этого уравнения метод прямого разделения движений (раздел 1.4.5). Запишем относительное смещение частицы в виде:

$$x = X(t) + \xi(\omega t), \quad (233)$$

где $X(t)$ – медленная составляющая движения;

$\xi(t)$ – периодическая составляющая с периодом $T = 2\pi / \omega$ и нулевым средним значением.

Очевидно, что среднее значение x (т.е. $\langle x \rangle$) равно X .

Подставив (233) в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$m\ddot{X}(t) + m\ddot{\xi}(\omega t) + mgf \operatorname{sign}[\dot{X}(t) + \dot{\xi}(\omega t)] - T = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (234)$$

Уравнение для медленной составляющей получим, если усредним каждый член уравнения (234). Поскольку среднее значение периодических функций равно 0, то будем иметь

$$m\ddot{X}(t) + \frac{mgf\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sign}(\dot{x} + \dot{\xi}) d(\omega t) = T. \quad (235)$$

Вычислим интеграл, положив $\dot{\xi} = a\omega \cos \omega t$, где a – полуразмах колебаний частицы относительно платформы:

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sign}(\dot{X} + \dot{\xi}) = \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sign}(\dot{X} + a\omega \cos \omega t) dt; \quad I = \int_{t_1}^{t_2} dt - \int_{t_2}^{t_3} dt,$$

где моменты времени t_1, t_2, t_3 мы уже вычисляли (рис. 73).

Поэтому

$$I = \arcsin\left(\frac{\dot{X}}{a\omega}\right). \quad (236)$$

Усредненная за период колебаний сила трения составит

$$\langle F(\dot{X} + \dot{\xi}) \rangle = F_U = \frac{2}{\pi} \cdot mgf \arcsin\left(\frac{\dot{X}}{a\omega}\right). \quad (237)$$

При $a\omega \gg \dot{X}$ формулу (237) можно переписать в таком виде $F_u \approx \frac{2}{\pi} \frac{mgf}{a\omega} \cdot \dot{X} = k\dot{X}$, где $k = \frac{2}{\pi} \frac{mgf}{a\omega}$.

Таким образом, в отношении медленного движения исходная сила сухого трения трансформировалась в силу вязкого линейного трения. Это означает, что если выполнено условие $\frac{(mgf - T)}{mA\omega^2} < 1$, то направленное перемещение частицы при вибрациях возможно при сколь угодно малой силе T .

Таким образом, уравнение, описывающее усредненное движение в нашей механической системе, имеем право записать в виде:

$$m\ddot{X} + \langle F(\dot{x} + \dot{\xi}) \rangle = T, \quad (238)$$

где $\langle F(\dots) \rangle$ – усредненная за период колебаний сила сухого трения.

При вычислении интеграла мы принимали, что $\dot{X} = const$, поскольку медленная составляющая не может сильно измениться за период колебаний. Чтобы быть последовательным, нужно тогда принять, что $\ddot{X} \approx 0$.

Следовательно, уравнение медленной составляющей мы можем представить в упрощенном виде.

$$\frac{2}{\pi} mg \operatorname{arcsin}\left(\frac{\dot{X}}{a\omega}\right) = T. \quad (239)$$

Из уравнения (239) можно найти выражения для медленной скорости

$$\dot{X} = U = a\omega \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) = const,$$

где $\varepsilon = T / (mgf)$.

Частица перемещается вдоль оси x с постоянной (в среднем за период колебаний) скоростью.

Уравнение быстрого движения получим, если из уравнения (234) вычтем уравнение (238):

$$m\ddot{\xi} + F(\dot{x} + \dot{\xi}) - \langle F(\dot{x} + \dot{\xi}) \rangle = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (240)$$

Учтем, что $\langle F(\dot{x} + \dot{\xi}) \rangle = T$, $\dot{X} \ll \dot{\xi}$,

тогда

$$F(\dot{x} + \dot{\xi}) - \langle F(\dot{x} + \dot{\xi}) \rangle = F(\dot{\xi}) - T \approx (F - T) \operatorname{sign} \dot{\xi}.$$

Смысл этого преобразования заключается в том, что медленным движением преодолевается только часть силы трения ($F_U = T$), а оставшая часть $(F - T)$ преодолевается быстрым (вибрационным) движением.

Отсюда можно записать уравнение для быстрого движения и в таком виде: $m\ddot{\xi} + (mgf - T) \operatorname{sign} \dot{\xi} = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$.

Если обозначить: $\dot{\xi}_* = \frac{\dot{\xi}}{A\omega}$; $\frac{mgf - T}{mA\omega^2} = z_1$; $\frac{\ddot{\xi}}{A\omega^2} = \ddot{\xi}_*$; $\omega t = \tau$,

то получим, что

$$\ddot{\xi}_* + z_1 \operatorname{sign} \dot{\xi}_* = \sin(\tau + \phi). \quad (241)$$

Последнее уравнение по форме совпадает с ранее рассматривавшимся уравнением (214), поэтому имеем право записать:

$$\xi = a \cos \omega t; \quad (242)$$

$$a = A \sqrt{1 - \left(\frac{4z_1}{\pi}\right)^2}; \quad (243)$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{4z_1}{\pi}\right). \quad (244)$$

Рассмотрим подробнее показатель z_1 :

$$z_1 = \frac{mgf - T}{mA\omega^2} = z - \frac{T}{mA\omega^2} = z - \frac{T}{mA\omega} \cdot \frac{mgf}{mgf} = z - z \cdot \varepsilon = z(1 - \varepsilon), \quad (245)$$

где $\varepsilon = T / (mgf) = T / F$.

В связи с этими дополнениями, формулы для полуразмаха проскальзывания частицы относительно вибрирующей плоскости и фазы колебаний можно записать окончательно в таком виде:

$$a = A \sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi} z(1 - \varepsilon)\right]^2}; \quad (246)$$

$$\phi = \arctg \frac{4z(1 - \varepsilon)}{\sqrt{\pi^2 - [4z(1 - \varepsilon)]^2}}. \quad (247)$$

Сюда же можно добавить формулу для скорости U медленного движения, потребную при различных технологических расчетах:

$$U = a\omega \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) = A\omega \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi} z(1 - \varepsilon)\right]^2}. \quad (248)$$

Как видно, скорость смещения частицы под действием силы T прямо пропорциональна амплитудному значению $A\omega$ вибрации плоскости, увеличивается с ростом ε и уменьшением параметра z .

Обратим еще раз внимание на то, что частица перемещается под действием самой малой силы T , много меньшей, чем сила трения F . При покоящейся плоскости частица была бы неподвижна. Это говорит о том, что вибрирующая плоскость является как бы скользкой, т.е. о переходе сухого трения в вязкое по отношению к медленным движениям в системе. Поэтому части-

ца легко соскальзывает с вибрирующей плоскости при ее незаметном для глаза наклоне к горизонту.

Динамика рассматриваемой системы зависит от двух безразмерных параметров z и ε . Относительное движение в системе и линеаризация сухого трения возможны при условиях

$$z_1 = \frac{mgf - T}{mA\omega^2} < 1; \quad \varepsilon = \frac{T}{mgf} = \frac{T}{F} < 1. \quad (249)$$

При $T > F$ движение возможно и без вибраций платформы или тела и для рассматриваемого эффекта этот случай интереса не представляет.

Сравнение полученной формулы (248) с численным решением исходного дифференциального уравнения (232) показывает хорошую сходимость результатов (рис. 76). Поэтому указанную формулу можно рекомендовать для широкого использования в инженерной практике.

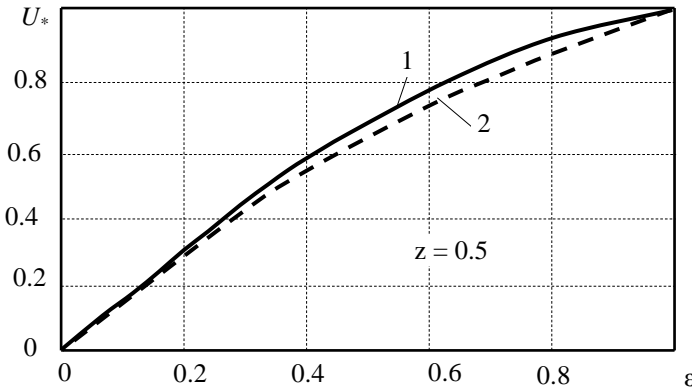


Рис. 76. Зависимость безразмерной скорости $U_* = U / A\omega$ от параметра ε при продольных вибрациях:

1 – зависимость, полученная по приближенной формуле (248); 2 – зависимость, полученная численным решением исходного дифференциального уравнения

Полученные результаты могут быть перенесены на другие системы, где происходит вибрационное преобразование сухого трения при продольных вибрациях.

В частности, формулы (246)...(248) могут без труда распространены на поведение частиц по наклонной плоскости, вибрирующей в своей плоскости (рис. 77).

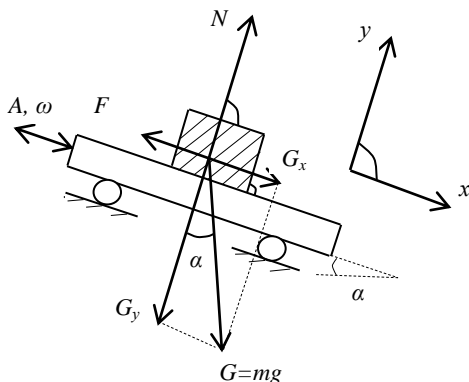


Рис. 77. Частица на вибрирующей наклонной плоскости

Представленная схема является простейшей расчетной схемой огромного количества транспортирующих, питающих, дозирующих, просеивающих и других типов машин. Здесь тянущей силой T является составляющая сила тяжести, направленная вдоль плоскости.

Рассмотренные выше теоретические предпосылки здесь применимы с оговоркой, что

$$z = \frac{gf \cos \alpha}{A\omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{tg \alpha}{f}. \quad (250)$$

2.1.4. Перемещение частицы в случае, когда направления вибраций горизонтальной шероховатой поверхности и дополнительной силы перпендикулярны

Это еще одна схема действия вибраций, используемая на практике в различных технологических машинах. Здесь реализуется несколько иной механизм кажущегося превращения сухого трения в вязкое.

Рассмотрим относительное движение частицы для случая, когда направление ее движения и направление колебаний перпендикулярны (рис.78, вид сверху)

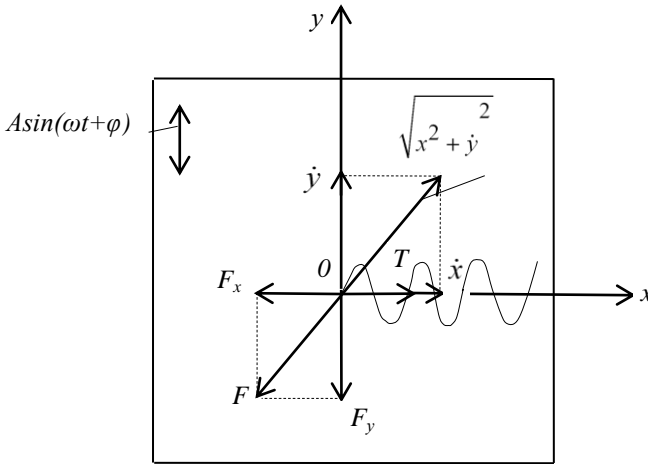


Рис. 78. Частица при поперечных колебаниях горизонтальной плоскости

Система координат xOy связана с вибрирующей поверхностью и лежит в ее плоскости. На частицу действует сила T , под действием которой частица в относительном движении перемещается на вибрирующей плоскости по пилообразной кривой. Пусть основным (технологически требуемым) будет движение частицы в направлении оси x . Тогда вспомогательное движение в поперечном направлении (в данном случае это движение носит вибрационный характер, хотя это и не обязательно) уменьшает трение в основном направлении.

Действительно, движению в направлении оси x противостоит не вся сила трения F , а лишь ее часть:

$$F_x = F \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (251)$$

Если обозначить $F\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = k$, то $F_x = k\dot{x}$, т.е. сила трения оказывается пропорциональной скорости, что является признаком вязкого трения.

Таким образом, дополнительное вибрационное движение облегчает основное, поскольку характеристика сухого трения преобразуется к виду вязкого трения.

Очевидно, что вспомогательное движение также испытывает обратное влияние основного, поскольку

$$F_y = F \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (252)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения относительного движения частицы запишутся в виде

$$m\ddot{x} + mgf \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - T = 0; \quad (253)$$

$$m\ddot{y} + mgf \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi); \quad (254)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Система уравнений (253)-(254) нелинейна и также из-за членов, связанных с сухим трением. В данной механической системе двумерное движение как бы уже разделено: уравнение (253) при усреднении характеризует медленное движение, уравнение (254) – быстрое.

Будем разыскивать усредненные движения в виде:

$$\langle \dot{x} \rangle = \dot{X} = U = const; \quad (255)$$

$$\dot{y} = -a\omega \cos \omega t. \quad (256)$$

где a – полуразмах относительных проскальзываний частицы.

Начнем с усреднения уравнения (253).

В силу исходных предпосылок имеем:

$$\langle m\ddot{x} \rangle = 0; \quad \langle T \rangle = T. \quad (257)$$

Усреднение нелинейного члена приводит к результату

$$\left\langle \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U}{\sqrt{U^2 + (-a\omega \cos \omega t)^2}} d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{1 + g^2}} K(k), \quad (258)$$

где $\mathcal{G} = U / (a\omega)$;

$K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{g^2 + 1}$ (этот интеграл табулирован, существуют его подробные таблицы).

Таким образом, усредненное уравнение (253) можно записать в виде

$$mgf \cdot \frac{2}{\pi} \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} K(k) = T, \quad \text{или} \quad (259)$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} K(k) = \varepsilon, \quad (260)$$

где $\varepsilon = T/(mgf)$.

Чтобы не обращаться к таблицам интеграла $K(k)$ и облегчить дальнейшие выкладки, проведем аппроксимацию уравнения (260) простой квадратичной зависимостью:

$$\varepsilon = 0,834g^2, \quad \text{или} \quad (261)$$

$$g = 1,438\varepsilon^2 \quad (262)$$

Запишем далее уравнение (259) таким виде:

$$F \cdot \varepsilon = T, \quad (263)$$

где $F = mgf$.

Таким образом, медленным движением (т.е. силой T) или движением вдоль оси x преодолевается часть силы трения F , равная

$$F_x = T = F\varepsilon.$$

Оставшаяся часть силы трения преодолевается частицей при движении вдоль оси y . Учитывая перпендикулярность этих сил, имеем

$$F_y = \sqrt{F^2 - F_x^2} = F\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (264)$$

Отсюда, с некоторым приближением, уравнение (254) можем записать в виде:

$$m\ddot{y} + mgf\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sign} \dot{y} = mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (265)$$

Введем традиционные обозначения

$$\xi = \frac{\ddot{y}}{A\omega^2}; \quad z = \frac{mgf}{A\omega}; \quad z_1 = z\sqrt{1 - \varepsilon^2}; \quad \tau = \omega t,$$

тогда последнее уравнение представим так

$$\xi + z_1 \operatorname{sign} \dot{\xi} = \sin(\tau + \phi). \quad (266)$$

Таким образом, опять пришли к форме уравнения (214), решение которого известно.

Для нашего случая имеем

$$y = a \sin \omega t ; \quad (267)$$

$$a = A \sqrt{1 - \left(\frac{4z}{\pi}\right)^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad (268)$$

Поскольку $\vartheta = U / (a\omega)$, с учетом (261) и (268) получим

$$U = a\omega\vartheta = 1,438\alpha\omega\varepsilon^2 = 1,438A\omega\varepsilon^2 \sqrt{1 - \left(\frac{4z}{\pi}\right)^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad (269)$$

Движение частицы по вибрирующей плоскости представляет равномерное в среднем движение в направлении действия силы T , при этом частица проскальзывает относительно плоскости с полуразмахом $a < A$.

Как и в случае продольных вибраций, скорость зависит от параметров вибраций (A , ω) и параметров (z , ε), характеризующих данную динамическую систему.

Таким образом, мы доказали, что в данной схеме действия вибраций, если они интенсивны, появляется перемещение частицы при сколько угодно малой силе T . А это также признак вязкого трения.

Соответствующее сравнение с численным решением дифференциальных уравнений (рис. 79) дает основание полагать о применимости формул (267-269) в различных инженерных расчетах для абсолютного большинства технологических режимов с $\varepsilon = 0-0,83$.

В диапазоне же $\varepsilon = 0,83-1$ точность аппроксимации (261) невелика, и подсчет скорости нужно вести на основе табулированных значений эллиптического интеграла $K(k)$.

В качестве примера использования данной схемы виброперемещения на рисунке 79 приведена расчетная схема рабочего органа дозатора, совершающего угловые колебания вокруг вертикальной оси. Такими рабочими органами (виброднищами) оснащен дозатор, который эффективен при дозировании различных сыпучих материалов, таких как зерно, какао-бобы, сахар, крупа и т.д.

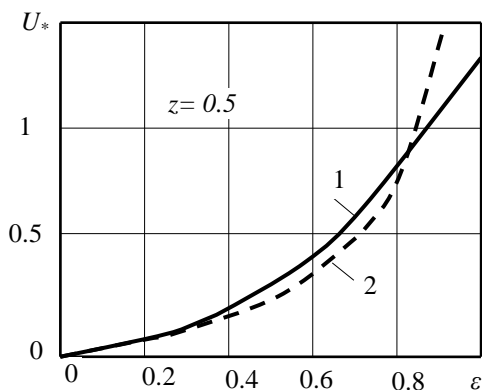


Рис. 79. Зависимость безразмерной скорости виброперемещения $U_* = U/(A\omega)$ от параметра ε при поперечных вибрациях:
 1 – аналитическое решение; 2 – численное решение

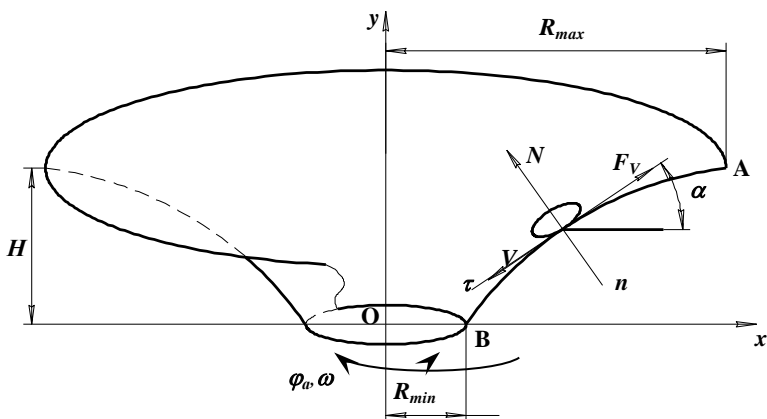


Рис. 80. Расчетная схема движения частицы по виброднищу дозатора

Под действием угловых колебаний тонкий слой сыпучего материала (на рисунке 80 показана одна частица) сползает вниз. Подача дозатора зависит от скорости частиц V , которая, в свою очередь, управляется изменением амплитуды φ_a и угловой частоты ω угловых колебаний.

При включении угловой вибрации виброднища его поверхность становится как бы скользкой (эффект линеаризации сухого трения), и дозируемый материал равномерно истекает в выгрузное отверстие. При отключении вибраций рабочего органа истечение материала сразу прекращается, а виброднище выполняет роль затвора. Для этого на всей поверхности виброднища угол α выполнен таким, чтобы соблюдалось условие $\operatorname{tg} \alpha < f$ (т.е. $\varepsilon < 1$).

2.2. Движение плоской частицы по горизонтальной плоскости, совершающей круговые поступательные колебания

2.2.1. Задача Жуковского о плоском расसेве

Эта задача актуальна для работы рассевов (мукомольное производство) и впервые была изучена Н.Е. Жуковским, который применил для ее решения геометрический метод. Жуковский рассматривал плоскую материальную частицу массой m на шероховатой горизонтальной поверхности, совершающей круговые колебания в своей плоскости радиуса R и частотой ω (рис. 81, вид на плоскость сверху).

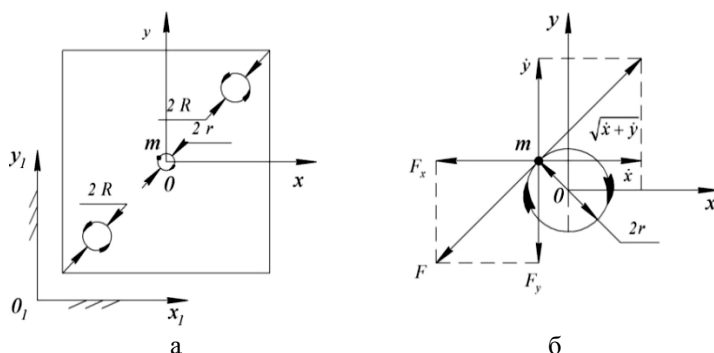


Рис. 81. Схема движения частицы по шероховатой плоскости, совершающей круговые поступательные движения (а) и разложение силы трения (б, увеличено) по направлениям относительных скоростей \dot{x} и \dot{y} (стрелки на круге радиуса r показывают направление относительного движения частицы)

Круговые колебания площадки достигаются прямолинейными гармоническими колебаниями по осям x_1 и y_1 , но со смещением по фазе на величину $\pi / 2$, т.е.

$$x_1 = R \cos \omega t ; \quad (270)$$

$$y_1 = R \sin \omega t . \quad (271)$$

При малой интенсивности вибраций, когда переносная сила инерции не превосходит силу трения в относительном движении $mR\omega^2 < mgf$, частица как бы «прилипает» к поверхности и относительного скольжения нет. В этом случае абсолютное движение частицы полностью совпадает с движением любой точки площадки.

При высокой интенсивности вибраций или исчезающе малого трения, т.е. при $mR\omega^2 \gg mgf$ частица останавливается (неподвижна) в абсолютной системе координат. Относительное же движение точки в этом случае представляет круговое движение радиуса R , но противоположно направлению движения поверхности.

При $mR\omega^2 > mgf$ вступают в действие дифференциальные уравнения относительного движения частицы:

$$m\ddot{x} + mgf \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = mR\omega^2 \cos \omega t ; \quad (272)$$

$$m\ddot{y} + mgf \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = mR\omega^2 \sin \omega t ; \quad (273)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0).$$

После сокращения на m и перехода к безразмерным переменным u , v и τ по формулам

$$u = \frac{\dot{x}}{R\omega} ; v = \frac{\dot{y}}{R\omega} ; \tau = \omega t , \quad (274)$$

данные уравнения преобразуются к виду

$$u' + z \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \cos \tau ; \quad (275)$$

$$v' + z \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin \tau; \quad (276)$$

$$(u^2 + v^2 \neq 0).$$

Здесь по прежнему $z = \frac{gf}{R\omega^2}$, а штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ .

Прямой подстановкой можно убедиться, что уравнения (275)-(276) имеют частное периодическое решение вида

$$u = \sqrt{1 - z^2} \cos(\tau - \phi); \quad (277)$$

$$v = \sqrt{1 - z^2} \sin(\tau - \phi), \quad (278)$$

$$\text{где } \cos \phi = z, \quad \sin \phi = \sqrt{1 - z^2}. \quad (279)$$

Здесь имеет место тот редкий случай, когда нелинейные дифференциальные уравнения получают точное решение в связи с симметрией данной системы.

Используя введенные соотношения (274), можно перейти к исходным переменным:

$$x = R\sqrt{1 - z^2} \sin(\omega t - \phi) = R\sqrt{1 - z^2} \cos[\omega t - (\frac{\pi}{2} + \phi)]; \quad (280)$$

$$y = R\sqrt{1 - z^2} \cos(\omega t - \phi) = R\sqrt{1 - z^2} \sin[\omega t - (\frac{\pi}{2} + \phi)]. \quad (281)$$

Следовательно, относительное движение частицы представляет круг с радиусом

$$r = R\sqrt{1 - z^2}, \quad (282)$$

меньшим, чем радиус R траектории колебаний плоскости.

Отставание частицы по фазе от колебаний плоскости составляет угол

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \phi. \quad (283)$$

Из формулы (282) следует, что относительно движение может существовать лишь при $z = gf / R\omega^2 < 1$. При интенсивных вибрациях ($z \rightarrow 0$) радиус z относительной траектории приближается к радиусу R колебаний плоскости.

2.2.2. Возмущенная задача Н.Е. Жуковского

В реальных условиях работы рассевов обычно появляется еще одна сила, не учтенная в уравнениях предыдущего раздела. Речь идет или о составляющей силы веса, если плоскость наклонена, или о действии направленного воздушного потока, или силе подпора со стороны поступающего на сито нового материала. Обозначая в общем случае эту силу буквой T , запишем исходные уравнения относительного движения частицы в таком виде:

$$m\ddot{x} + mgf \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - T = mR\omega^2 \cos \omega t ; \quad (284)$$

$$m\ddot{y} + mgf \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = mR\omega^2 \sin \omega t , \quad (285)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0).$$

Уравнения (284)-(285) представляют собой формулировку т.н. возмущенной задачи Жуковского. Введем как обычно безразмерные переменные

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{R\omega} ; v = \frac{\dot{y}}{R\omega} ; \tau = \omega t ; z = \frac{gf}{R\omega^2} ; \varepsilon = \frac{T}{mgf}. \quad (286)$$

Предыдущие уравнения в новых переменных примут вид

$$u' + z \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - z\varepsilon = \cos \tau ; \quad (287)$$

$$v' + z \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin \tau ; \quad (288)$$

$$(u^2 + v^2 \neq 0).$$

Введем далее малый параметр

$$\mu = z\varepsilon , \quad (289)$$

представляющий произведение двух малых величин ($z < 1, \varepsilon < 1$).

С учетом этого исходная задача примет окончательный вид

$$u' + z \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \mu = \cos \tau ; \quad (290)$$

$$v' + z \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin \tau; \quad (291)$$

$$(u^2 + v^2 \neq 0).$$

Для решения этой задачи необходим переход к полярным координатам ρ и ψ по формулам

$$u = \rho \cos(\tau - \psi); \quad (292)$$

$$v = \rho \sin(\tau - \psi). \quad (293)$$

Дальнейшее решение следует книге [43].

Продифференцируем эти выражения по переменной τ :

$$u' = \rho' \cos(\tau - \psi) - \rho(1 - \psi') \sin(\tau - \psi); \quad (294)$$

$$v' = \rho' \sin(\tau - \psi) + \rho(1 - \psi') \cos(\tau - \psi). \quad (295)$$

Подставляя значения функций u и v и их производных в систему (290)-(291), после преобразований получим

$$\rho' = \cos \psi - z + \mu \cos(\tau - \psi); \quad (296)$$

$$\rho(1 - \psi') = \sin \psi - \mu \sin(\tau - \psi). \quad (297)$$

Данные уравнения решаются методом малого параметра μ , т.е. в виде рядов

$$\rho = \rho_0(\tau) + \mu \rho_1(\tau) + \mu^2 \rho_2(\tau) + \dots; \quad (298)$$

$$\psi = \psi_0(\tau) + \mu \psi_1(\tau) + \mu^2 \psi_2(\tau) + \dots \quad (299)$$

по степеням малого параметра с 2π – периодическими коэффициентами.

Порождающая система ($\mu=0$) отвечает разобранный в предыдущем разделе невозмущенной задаче Жуковского

$$\rho_0' = \cos \psi_0 - z; \quad (300)$$

$$\rho_0(1 - \psi_0') = \sin \psi_0 \quad (301)$$

и допускает стационарное решение $\psi_0 = \phi = \arccos z$;

$$\rho_0 = \sin \phi = \sqrt{1 - z^2}.$$

Для нахождения первого приближения, которым мы и ограничимся, необходимо составить дифференциальные уравнения первого приближения. Для этого подставляем первые два

члена каждого ряда (298) и (299) в исходные уравнения (290)-(291), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим искомую систему

$$\rho_1' + \psi_1 \sin \phi = \cos(\tau - \phi); \quad (302)$$

$$\psi_1' \sin \phi - \rho_1 + \psi_1 \cos \phi = \sin(\tau - \phi). \quad (303)$$

Периодическими решениями этих уравнений будут, соответственно,

$$\rho_1 = 2tg\phi \cos(\tau - \phi) + \sin(\tau - \phi); \quad (304)$$

$$\psi_1 = \frac{2 \sin(\tau - \phi)}{\cos \phi}. \quad (305)$$

Тогда полное решение с первой степенью приближения можно, учитывая, что $\rho_0 = \sin \phi$, представить в следующем виде:

$$\rho = \sin \phi + \mu \left[2tg\phi \cos(\tau - \phi) + \sin(\tau - \phi) \right]; \quad \psi = \phi + 2\mu \frac{\sin(\tau - \phi)}{\cos \phi}.$$

После перехода к исходным переменным u и v решение получим в виде

$$u = \sin \phi \cos(\tau - \phi) + \mu \left[2tg\phi + \frac{1}{2} \sin 2(\tau - \phi) \right]; \quad (306)$$

$$v = \sin \phi \sin(\tau - \phi) + \frac{\mu}{2} \left[1 - \cos 2(\tau - \phi) \right]. \quad (307)$$

Это решение несколько неожиданно.

Во-первых, периодические составляющие являются не только 2π -, но 4π - периодическими (удвоенной частоты).

Во-вторых, скорости u и v имеют постоянные составляющие. Это есть средние скорости перемещения частицы.

$$U = 2\mu tg\phi = 2z\epsilon tg\phi; \quad (308)$$

$$V = \mu / 2 = \frac{z\epsilon}{2}. \quad (309)$$

Таким образом, дополнительная сила T , действующая по оси x , вызывает среднее за период перемещение частицы не только в направлении этой оси, но и в перпендикулярном направлении (рис. 82).

Тангенс угла α направления движения частицы с осью x составит

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{U} = \frac{1}{4 \operatorname{tg} \phi}. \quad (310)$$

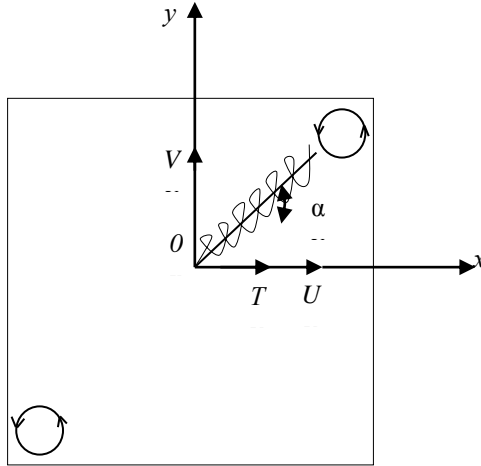


Рис. 82. Боковой снос частицы над действием силы T

В силу $\cos \phi = z$; $\sin \phi = \sqrt{1 - z^2}$; $\operatorname{tg} \phi = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$

имеем

$$\alpha = a z \operatorname{ctg} \frac{z}{4 \sqrt{1 - z^2}}, \quad (311)$$

т.е. угол сноса α всецело определяется параметром z .

В размерных скоростях U_x и V_x будем иметь

$$U_x = 2R\omega\varepsilon\sqrt{1 - z^2}; \quad (312)$$

$$V_y = 0,5R\omega z\varepsilon. \quad (313)$$

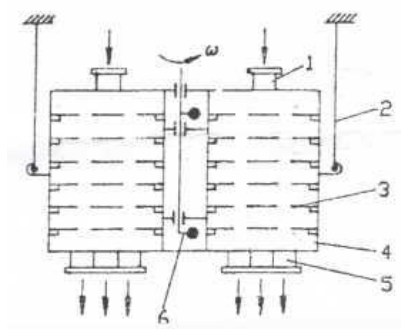
Направление сноса (т.е. направление угла α) зависит от направления абсолютного движения точек плоскости по круговым траекториям. Отклонение линии траектории происходит в

ту сторону, в которую направлены абсолютные скорости точек поверхности в момент ее выхода из наинизшего положения (в рассматриваемом случае угол α должен быть направлен в положительном направлении – против часовой стрелки).

Изложенная теория применима для обоснования режимов работы *рассеивов*, используемых на мукомольных предприятиях для сортирования продуктов размола по крупности.

После измельчения зерна в драных системах получается неоднородный продукт, резко различающийся по размерам составляющих его частиц. Это затрудняет его дальнейшую обработку, поскольку невыравненный по гранулометрическому составу продукт не позволяет точно отрегулировать режим работы соответствующих размольных систем. Исходя из этого промежуточные продукты измельчения подвергают сортированию по крупности. Для этой цели используют специальные машины – *рассеивы* (рис. 83). Основная часть *рассеива* – ситовые корпуса, состоящие из уложенных друг над другом деревянных рам с натянутыми горизонтальными ситами. Ситовые корпуса совершают круговые поступательные движения (круговые колебания) в горизонтальной плоскости под действием неуравновешенных масс – *дебалансов* (в отдельных конструкциях *рассеивов* применяются эксцентриковые механизмы). Частота ω круговых колебаний сит составляет $20 \dots 24 \text{ с}^{-1}$. Масса *дебалансов* подбирается такой, чтобы радиус (амплитуда) R круговых колебаний корпуса *рассеива* достигал $35 \dots 50 \text{ мм}$.

Рис. 83. Принципиальная схема *рассеива*: 1 – рукав для ввода сортируемого материала; 2 – тросовые подвески; 3 – ситовые корпуса; 4 – корпус *рассеива*; 5 – выпускное устройство; 6 – *дебалансный* возбудитель колебаний



Толщина слоя на сите составляет обычно 14...20 мм. Поэтому процесс сортирования состоит из двух этапов: а) самосортирования, при котором тяжелые мелкие частицы, погружаясь в слой, постепенно достигают сита; б) просеивания, характерного проваливанием проходových частиц через отверстия сита. Первый этап может быть эффективно осуществлен, если слой разрыхляется, что может быть достигнуто послойным перемещением продукта. Обязательное условие послойного перемещения – достаточная шероховатость опорной поверхности, т.е. сита. В противном случае весь сыпучий груз движется как твердое тело или как одна материальная частица. Тем не менее нижний слой также должен проскальзывать относительно сита, чтобы проходové частицы «находили» отверстия сита.

При постепенном увеличении частоты колебаний ω должна наблюдаться следующая картина: сначала в относительное круговое движение вовлекаются частицы верхнего слоя (соответствующее этому ускорение сита называют первым критическим), затем нижележащие и, наконец, при втором критическом ускорении начинается перемещение нижнего слоя относительно сита. При достижении второго критического ускорения интенсивность послойного движения максимальная, а при дальнейшем увеличении колебаний она уменьшается, поскольку сыпучий продукт не успевает следовать за движением сита и останавливается в абсолютном движении.

Таким образом, одним из условий нормального функционирования отсева является неравенство вида

$$f > f_0,$$

где f – коэффициент трения продукта о сито;

f_0 – коэффициент внутреннего трения данного продукта.

Другое условие состоит в правильном выборе величины второго критического ускорения сита, т.е. $z > 1$. Причем не должно быть $z \gg 1$, иначе послойного движения материала, как уже отмечалось, не будет.

2.3. Разделение компонентов сыпучих смесей под действием вибраций

2.3.1. Движение частицы в среде с сопротивлением типа сухого трения, совершающей вертикальные колебания

Рассмотрим движение тяжелой частицы, помещенной в слой сыпучего материала. Последний вибрирует вместе с контейнером в вертикальном направлении по закону (рис. 84) $x = A \sin \omega t$.

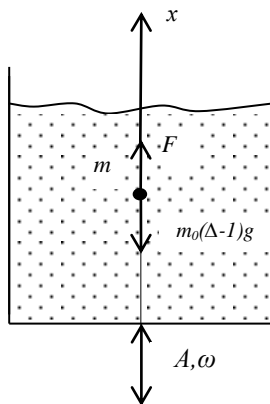


Рис. 84. Частица в вибрируемом слое сыпучего материала

Массу частицы с учетом присоединенной массы среды обозначим через m_1 , а массу среды в объеме, равном объему частицы – через m_0 , отношение средних плотностей частицы и среды через $\Delta = \rho / \rho_0$. На частицу действует сила сопротивления F типа сухого трения. Тогда дифференциальное уравнение движения частицы относительно среды может быть записано в виде:

$$m_1 \ddot{x} + F \text{sign} \dot{x} - m_0 (\Delta - 1) g = m_0 (\Delta - 1) A \omega^2 \sin(\omega t + \phi). \quad (314)$$

В этом уравнении, кроме силы F , фигурируют:

$T = m_0 (\Delta - 1) g$ – сила веса частицы за вычетом архимедовой силы;

$J_e = m_0(\Delta-1)A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ – переносная сила инерции.

Чтобы частица могла двигаться относительно среды, необходимо выполнение соотношения:

$$m_0(\Delta-1)(g + A\omega^2) > F. \quad (315)$$

Разделим каждый член уравнения (314) на m_1 :

$$\ddot{x} + \frac{F}{m_1} \operatorname{sign} \dot{x} - \lambda g = \lambda A\omega^2 \sin(\omega t + \phi), \quad (316)$$

где $\lambda = \frac{m_0}{m_1}(\Delta-1)$.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$u = \frac{\dot{x}}{\lambda A\omega}; \quad \tau = \omega t; \quad z = \frac{F}{m_1 \lambda A\omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{\lambda g}{F/m_1}. \quad (317)$$

Тогда уравнение (316) можно записать в том виде, который уже был подвергнут изучению (241-245):

$$u' + z(\operatorname{sign} u - \varepsilon) = \sin(\tau + \phi).$$

Решая это дифференциальное уравнение, мы нашли приближенную формулу для скорости медленного (осредненного) движения частицы в безразмерном виде (248).

$$U = \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi} z(1 - \varepsilon)\right]^2}. \quad (318)$$

Обратим внимание на величину ε под знаком синуса

$$\varepsilon = \frac{\lambda g}{(F/m_1)} = \frac{m_0}{m_1}(\Delta-1) \cdot \frac{g}{(F/m_1)} = \frac{m_0(\Delta-1)}{F} g. \quad (319)$$

Если частица тяжелее среды, то $\Delta > 1$, $\varepsilon > 0$, и частица опускается вниз (тонет, что и ожидалось). Если же частица легче среды, то $\Delta < 1$, $\varepsilon < 0$, и имеем $\sin\left(-\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)$.

Следовательно, скорость U поменяла знак, и ее вектор направлен вверх (рис. 84). Это означает, что частица легче среды над действием вибраций всплывает к поверхности. Очевидно, что без вибраций это было бы невозможно.

Следовательно, и здесь проявился эффект кажущегося превращения сухого трения в вязкое, приводящего к реальным результатам. Слой сыпучего материала как бы разжижается,

превращается в вязкую среду. Но это чисто механический эффект вибраций, который мгновенно исчезает при прекращении вибрации контейнера.

Если сопоставить формулу (318) в размерном виде

$$u_x = A\omega \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi} z(1-\varepsilon)\right]^2} \quad (320)$$

с известным выражением Стокса для скорости свободного падения шарообразной частицы в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса [15]

$$u_x^* = \frac{m_0(\Delta-1)g}{3\pi\mu d}. \quad (321)$$

(d – диаметр частицы, μ – коэффициент вязкости жидкости), то найдем эффективный (кажущейся) коэффициент вязкости сыпучей среды при вибрациях

$$\mu = \frac{m_0(\Delta-1)g}{3\pi d} \cdot \frac{1}{A\omega \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi} z(1-\varepsilon)\right]^2}}. \quad (322)$$

Как видно, эффективный коэффициент вязкости сыпучей среды зависит, в том числе, и от параметров вибраций. Чем больше A и ω , тем меньше μ , тем больше сыпучая среда разжижается, в существенной степени проявляя вязкие свойства.

Можно показать, что подобное разделение сыпучей среды на составляющие, отличающиеся по плотности, возможно при поперечных или круговых колебаниях контейнера. Эти теории объясняют, например, факт диффундирования тяжелых частиц вниз слоя, находящегося на вибрирующих решетках. Это, как известно, первый этап просеивания, второй состоит в прохождении частиц через отверстия решета.

Однако при появлении в системе какой-либо анизотропии (силовой, кинематической и т.д.) картина может в корне поменяться. При энергичном встряхивании вниз контейнера с металлическим шаром в слое песка или крупы шар всплывает вверх (читатель может проделать опыт сам или посмотреть видео на www.galileo-tv.ru «Галилео. Эксперимент. Песок и шар, или инерция»).

Соответственно, легкая частица в слое тяжелых может опуститься вниз к дну вибрирующего контейнера.

Особую проблему представляет сортирование при вибрациях крупных и легких частиц («проблема бразильского ореха» – в смеси орехов бразильский как самый крупный всегда оказывается в открываемой банке вверху). Явление объясняется просыпанием вниз через поры мелких частиц, и эта подложка постепенно вытесняет крупные частицы вверх.

Указанные эффекты в принципе могут служить основой для бесситной классификации сыпучих материалов. Однако грань между классификацией и смешиванием частиц очень тонка, что препятствует широкому использованию этих эффектов в технологии.

2.3.2. Разделение смеси на вибрирующих поверхностях

Частицы сыпучей смеси, как правило, имеют разные физико-механические свойства: коэффициенты трения, восстановления скорости при ударе, форму, плотность и т.д.

Это обстоятельство приводит к тому, что частицы на вибрирующих поверхностях перемещаются по различным траекториям, т.е. разделяются по комплексу физико-механических свойств.

Для демонстрации этого эффекта рассмотрим деку с плоской поверхностью, совершающей круговые поступательные вибрации в своей плоскости. Характерная особенность таких устройств состоит в наклоне вибрирующей поверхности (рис. 85).

За счет наклона появляется тянущая сила $T = mg \sin \beta$, зависящая от угла наклона β . В остальном эта схема ничем не отличается от изображенной на рисунке 82, соответственно, пригоден и анализ, проведенный разделе 2.2.2.

В частности, там была выведена формула для угла α сноса (отклонения) частицы от оси x :

$$\alpha = \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}}, \quad (323)$$

где z в данном случае определяется выражением:

$$z = \frac{gf \cos \beta}{R\omega^2}. \quad (324)$$

Как видно, угол сноса α является управляемым с помощью факторов f, β, R, ω . В частности, если частицы имеют разный коэффициент трения (например, семена злаковых культур и сорняков), то при прочих равных условиях угол α для этих частиц будет разным, что означает движение частиц по деке по разным траекториям (рис. 85 б). Остается лишь собрать полученные фракции в разные контейнеры.

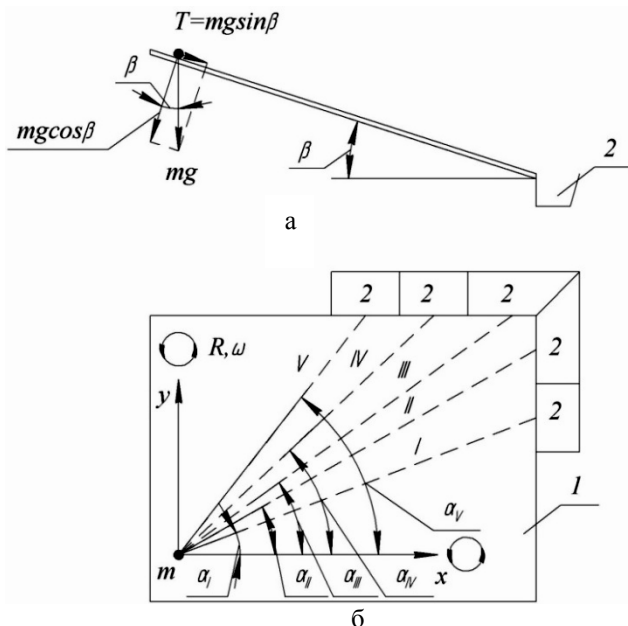


Рис. 85. Вид на деку сбоку (а) и сверху (б): 1 – дека; 2 – контейнеры для сбора полученных фракций смеси; (I-V – усредненные траектории движения частиц)

Существует много подобных устройств с различными видами колебаний, с плоской и криволинейной поверхностью деки. Наклон деки регулируется, чаще всего, в двух плоскостях. В качестве фактора разделения может выступать не только коэффициент трения, но и другие технологические характеристики исходного сырья.

2.4. Модели виброперемещения с подбрасыванием материала

2.4.1. Частица на вертикально вибрирующей платформе

Рассмотрим движение частицы округлой формы, принимаемую за материальную точку, на вибрирующей платформе (рис. 86).

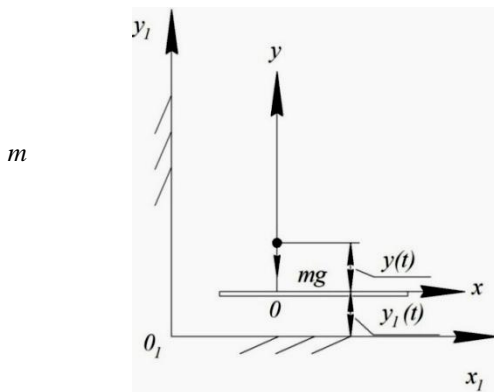


Рис. 86. Частица на вибрирующей платформе

Пусть платформа движется поступательно в вертикальном направлении по закону

$$y_1 = A \sin(\omega t + \phi), \quad (315)$$

где A , ω – амплитуда и угловая частота колебаний.

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения частицы, то есть в координатной системе xOy , движущейся вместе с платформой:

$$m\ddot{y} = -mg + mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi), \quad (316)$$

где y – относительная координата частицы.

Последний член в уравнении (316) представляет собой переносную силу инерции.

Уравнение (316) легко интегрируется. Последовательно находим

$$\dot{y} = -gt - a\omega \cos(\omega t + \phi) + C_1; \quad (317)$$

$$\ddot{y} = -\frac{gt^2}{2} - a \sin(\omega t + \phi) + C_1 t + C_2. \quad (318)$$

Поскольку частица круглая, то процесс соударения с платформой сводится к прямому центральному удару, что является еще одним свидетельством ее представления в виде материальной точки.

За начало отсчета времени выбираем момент соударения частицы с платформой. Считаем также, что за один период колебаний $T = 2\pi / \omega$ происходит одно мгновенное соударение частицы. Тогда имеем три условия для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$y(0) = 0; \quad y(T) = 0; \quad -R\dot{y}(T) = \dot{y}(0). \quad (319)$$

Последнее выражение записано в соответствии с известной гипотезой Ньютона, согласно которой отношение значений скорости тела после удара и до удара есть постоянная величина, не зависящая ни от скорости удара, ни от размеров, а лишь от материала соударяющихся тел, характеризуемых коэффициентом восстановления R ($0 \leq R < 1$).

На основе выражений (317) (319) находим [65]

$$C_1 = \pi g / \omega; \quad (320)$$

$$C_2 = \pm A \sqrt{1 - \left(\frac{\pi g}{A\omega^2} \cdot \frac{1-R}{1+R} \right)^2}; \quad (321)$$

$$\cos \phi = \frac{\pi g(1-R)}{A\omega^2(1+R)}. \quad (322)$$

Из выражений (321) и (322) следует двузначность полученных результатов, что предполагает существование двух режимов движения частицы, различающихся фазами встречи частицы с платформой. В режиме *I* (рис. 87) удары происходят в те промежутки времени, когда платформа находится выше среднего уровня, в режиме *II* – в нижнем положении платформы (этот режим на рисунке не показан).

Найдем условия существования этих режимов. Из выражения (322) имеем, поскольку $\cos \delta \leq 1$, следующее ограничение на параметры вибрации:

$$r \geq \pi \cdot \frac{1-R}{1+R}, \quad (333)$$

где $r = A\omega^2 / g$ – коэффициент перегрузки.

Таким образом, исследуемые режимы могут появляться лишь при превышении платформой некоторого порога интенсивности колебаний. В противном случае частица может либо вообще не отрываться от платформы, либо процессы свободного полета частицы будут малы по сравнению с периодом колебаний.

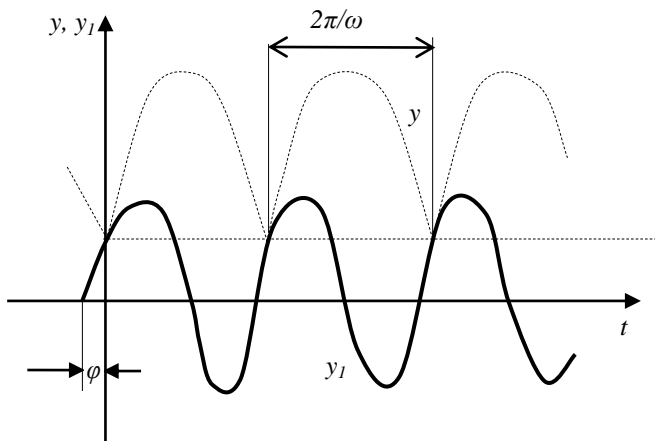


Рис. 87. К пояснению устойчивости режима подбрасывания частиц

Из выражения (333) следует, что режимы с подбрасыванием легче получить для упругих частиц, у которых $R \rightarrow I$.

Анализ устойчивости исследуемых режимов показывает, что режим *I* (рис. 87) устойчив, а режим *II* неустойчив, т.е. физически нереализуем. Иными словами, при каких бы произвольных условиях ни начинался процесс подбрасывания, он будет от цикла к циклу неограниченно приближаться к единственному устойчивому режиму *I*.

Заметим, что речь идет об устойчивости по вертикальной координате y . Однако опыт показывает, что круглая материальная частица имеет неустойчивый режим движения по двум горизонтальным координатам: точка соударений хаотически перемещается по плоскости. Движение частицы по этим координатам существенно зависит от начальных условий. Поскольку модель нелинейна, то еще нужно доказать, что неустойчивость

движения по горизонтали не сказывается на движении по вертикали (никто пока этого не сделал). Возможно, что это является причиной появления хаотических режимов подпрыгивания частицы по вертикали, которые обнаружили недавно физики. В последнем случае речь идет о детерминированном хаосе. При этом случайные возмущения не вносятся, они как бы генерируются самой системой. Источником хаоса здесь могут быть также указанные выше два режима движения частицы. Возникновение хаоса может состоять в том, что система «перепрыгивает» с одного режима на другой, в результате чего и появляется хаос.

Рассмотренная теория может быть базовой моделью различных технологических процессов и физических явлений: сепарации сыпучего материала на ситах, движение частиц при сушке и обжарке семян подсолнечника, зерен кофе и т.п. Физики моделирует такой схемой ускорение Ферми космических лучей.

2.4.2. Наклонные вибрации платформы

При наклоне направления вибраций появляется кинематическая анизотропия в системе, вследствие чего обнаруживается направленное движение материала, который опять моделируем частицей.

Если перемещаемый материал допускает подбрасывание с последующим ударом о поверхность рабочего органа, то можно получить большую скорость перемещения частицы по сравнению с безударными вибрационными режимами. Увеличение скорости перемещения частицы в вибрационном транспорте с подбрасыванием груза объясняется тем, что горизонтальное перемещение частицы по этой схеме происходит при свободном ее полете, в отличие от безударных режимов, при которых частица всегда находится в контакте с рабочим органом.

На рисунке 88 показана схема вибрационного перемещения, при котором рабочий орган совершает колебания, направленные под углом α к горизонтали, по гармоническому закону:

$$s = A \sin \omega t,$$

где A – амплитуда;

ω – угловая частота;

t – время.

По данной схеме работает большинство вибрационных транспортеров, перемещающих различные грузы.

Дальнейшее изложение теории следует [14, 71].

Вертикальная и горизонтальная составляющие движения рабочего органа определяются соотношениями

$$y_1 = A \sin \alpha \sin \omega t, \quad x_1 = A \cos \alpha \sin \omega t. \quad (334)$$

Дифференцирование по времени дает:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A\omega \sin \alpha \cos \omega t, & \ddot{y}_1 &= -A\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t, \\ \dot{x}_1 &= A\omega \cos \alpha \cos \omega t, & \ddot{x}_1 &= -A\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t. \end{aligned} \quad (335)$$

Рассмотрим сначала вертикальное движение частиц после отрыва от платформы, которое происходит в момент времени t_1 , когда вертикальное ускорение \ddot{y}_1 по абсолютной величине становится равным ускорению силы тяжести : $A\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t_1 = g$.

Основным параметром рабочего органа указанного типа является безразмерный коэффициент режима вибрации, т.е. коэффициент перегрузки $r = \frac{A\omega^2 \sin \alpha}{g}$.

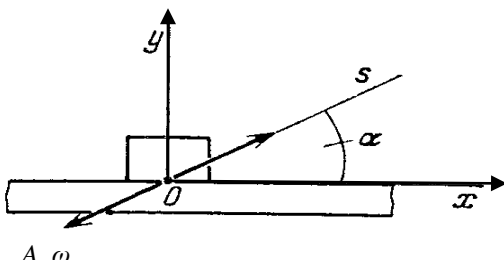


Рис. 88. Схема перемещения частицы с подбрасыванием (xOy – подвижная система координат, связанная с платформой)

Этот коэффициент показывает, во сколько раз максимум вертикальной составляющей ускорения рабочего органа \ddot{y}_{max} больше ускорения силы тяжести. Момент времени t_1 , при кото-

ром происходит отрыв частицы, связан с коэффициентом режима вибрации соотношением:

$$\sin \omega t_1 = r^{-1}. \quad (336)$$

Свободный полет груза в вертикальном направлении описывается уравнением:

$$y = y_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g \frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (337)$$

где y – вертикальное перемещение частицы;

y_0 – начальное положение частиц в момент отрыва от платформы;

\dot{y}_0 – начальная скорость частицы в этот же момент.

Из соотношений (334) и (335) получаем $y_0 = A \sin \alpha \sin \omega t_1$,
 $\dot{y}_0 = A \omega \sin \alpha \cos \omega t_1$.

Подставляя значения y_0 и \dot{y}_0 в уравнение (337) и принимая во внимание (336), имеем:

$$y = \frac{g}{\omega^2} + \frac{gr \cos \omega t_1}{\omega} (t - t_1) - \frac{g}{2} (t - t_1)^2.$$

Момент времени t_2 падения частицы на рабочий орган находим из условия $y_1 = y$:

$$A \sin \alpha \sin \omega t_2 = \frac{g}{\omega^2} + \frac{gr \cos \omega t_1}{\omega} (t_2 - t_1) - \frac{g}{2} (t_2 - t_1)^2. \quad (338)$$

Введем обозначение

$$\delta = \frac{\omega}{2} (t_2 - t_1). \quad (339)$$

Тогда условие (338) принимает вид

$$A \sin \alpha \sin(2\delta + \omega t_1) = \frac{g}{\omega^2} + \frac{2\delta gr_B}{\omega^2} \cos \omega t_1 - \frac{2g\delta^2}{\omega^2};$$

или $\sin(2\delta + \omega t_1) = \sin \omega t_1 + 2\delta \cos \omega t_1 - 2\delta^2 \sin \omega t_1. \quad (340)$

Из квадратного уравнения (340) при известном значении ωt_1 находим δ , затем t_2 из (339). В момент времени t_2 происходит удар, и если нет отскока, частица движется в контакте с рабочим органом до полного отрыва при $t = t_1 + (2\pi / \omega)$. На рисунке 89

штриховой линией показан график $y(t)$ при $t_2 < t_1 + (2\pi/\omega)$. При $t_2 = t_1 + (2\pi/\omega)$ наблюдается режим непрерывного подбрасывания. Для этого режима $\delta = \pi$. Подставляя $\delta = \pi$ в уравнение (340), находим значение ωt_1^* , при котором будет осуществляться режим непрерывного подбрасывания:

$$\sin \omega t_1^* = \sin \omega t_1^* + 2\pi \cos \omega t_1^* - 2\pi^2 \sin \omega t_1^*, \text{ или } \operatorname{tg} \omega t_1^* = \frac{1}{\pi}.$$

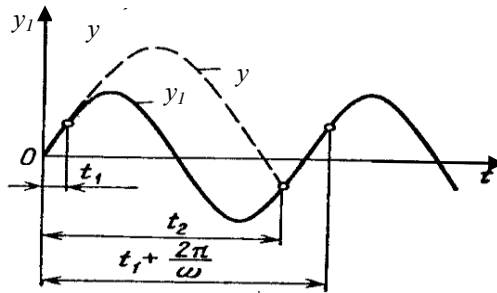


Рис. 89. Иллюстрация режима с непрерывным подбрасыванием материала (частицы)

Безразмерный коэффициент режима вибрации при непрерывном подбрасывании $r^* = \frac{1}{\sin \omega t_1^*}$, или $r^* = \sqrt{\pi^2 + 1} \approx 3.3$.

Эта формула выведена в предположении абсолютно неупругого удара при падении частицы на платформу, когда коэффициент восстановления скорости при ударе $R = 0$.

Для реальных условий $R \neq 0$ исследователями получено другое, более мягкое условие [71] $r^* = \pi \frac{1-R}{1+R}$.

Поэтому в вибрационных транспортерах обычно принимают: $2 < r < 2,8$. Горизонтальная скорость при свободном полете сохраняется постоянной и равной горизонтальной составляющей рабочего органа в момент отрыва частицы

$$V_1 = \dot{x}_{t=t_1} = A\omega \cos \alpha \cos \omega t_1 \text{ или } V_1 = A\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r}. \quad (341)$$

После удара частица некоторое время находится в контакте с рабочим органом, т. е. горизонтальная составляющая скорости $V_1 = \dot{x}$ согласно соотношениям (335). Вследствие относительной кратковременности контакта груза с рабочим органом считают, что горизонтальную скорость груза можно принять постоянной и равной скорости V_1 с поправочным коэффициентом κ , зависящим от вида перемещаемого материала:

$$V = kA\omega \cos \alpha \sqrt{1 - r^{-2}}. \quad (342)$$

Задача экспериментального исследования состоит, таким образом, в определении поправочного коэффициента k для различных видов транспортируемых материалов (табл. 1).

Процесс транспортирования тонкого слоя песка в наибольшей степени отвечает модели единичной частицы, поэтому песок принят за продукт-эталон, для которого поправочный коэффициент k в формуле (342) равен 1. Все другие продукты имеют более низкую скорость вибротранспортирования, что объясняется неправильной формой частиц, сцеплением их между собой, действием воздушных потоков и рядом других причин.

Таблица 1

**Сравнительная транспортабельность насыпных продуктов
(по И.Ф. Гончаревичу)**

Наименование продукта	Коэффициент k	Наименование продукта	Коэффициент k
Песок влажностью 5...6% (эталон)	1,0	Сухое молоко	0,3
Соль поваренная	0,9-1,0	Порошок яичный	0,3
Мука грубого помола	0,2-0,4	Сахар-песок	0,65
Мука мелкого помола	0,1-0,2	Табак резаный	0,8
Стружка свекловичная	0,8	Рис	0,6-0,7
Солод зеленый	0,7-0,8	Манная крупа	0,6-0,7
Жом сахарного тростника	0,95	Кофе в зернах	0,65-0,75
Зерно	0,9	Кормосмеси	0,4-0,5

Профессор И.И. Блехман отмечает следующие важные достоинства вибрационного способа транспортирования с подбрасыванием материала [18, 19]:

1. Транспортирующие органы вибрационных конвейеров легко герметизируются, что особенно важно при транспортировании пылящих и токсичных материалов; они сравнительно легко приспособляются и для транспортировки горячих материалов. Все это позволяет значительно улучшить условия труда на ряде производств.

2. Износ рабочего органа вибрационных конвейеров при правильном выборе режима вибрации весьма невелик, даже в случае перемещения высокоабразивных грузов. В связи с этим путем использования специальных покрытий легко обеспечивается также перемещение агрессивных материалов.

3. Производительность вибрационных транспортирующих машин легко изменяется на ходу от нуля до максимума, например, путем изменения амплитуды вибрации, что особенно просто осуществляется при использовании электромагнитного привода. Это позволяет эффективно применять их в автоматизированных технологических линиях, а также в случаях, когда необходима дозированная или легко регулируемая подача материала. Легко решается и задача реверсирования, т.е. изменения направления подачи материала. Для этого достаточно, например, установить на трубе или на винтовом лотке два дополнительных вибровозбудителя с соответствующим образом ориентированными осями.

4. В вибрационных конвейерах процесс транспортирования удачно сочетается с рядом технологических операций, таких как просеивание, сушка, разделение частиц сыпучего материала по их различным свойствам, интенсификация химических реакций и биологических процессов и т.п.

Существует и ряд других достоинств: малая энергоемкость, отсутствие трущихся и быстроизнашивающихся деталей, безопасность эксплуатации. Конструкции большинства типов вибрационных конвейеров являются практически полностью уравновешенными, они не требуют устройства фундаментов и могут быть без особых опасений установлены на верхних этажах зданий.

Реальная максимальная подача вибрационных конвейеров относительно велика, достигает 200 т/ч для горизонтальных и 100 т/ч для вертикальных, что превышает потребности технологических процессов АПК. Вибрационные питатели обеспечивают подачу до 3000 т/ч. Сравнительно велика и рациональная длина вибрационных конвейерных линий (порядка 50-100 м). Скорости транспортирования обычно составляют 30-60 см/с.

В заключение приведем ряд конструкций вибрационных машин, в которых реализован принцип перемещения материала с его подбрасыванием.

Кормораздатчики представляют собой вибротранспортеры, приспособленные для раздачи этих материалов. Они имеют несложную конструкцию, просты в изготовлении и в эксплуатации.

На фермах нашли применение неуравновешенные схемы вибротранспортеров (рис. 90) с приводом от эксцентрикового механизма I посредством жесткого шатуна 2. Эксцентриковый механизм приводится во вращение от электродвигателя 3 через ременную передачу 4. Кормонесущий желоб 5 укреплен на рессорах 6.

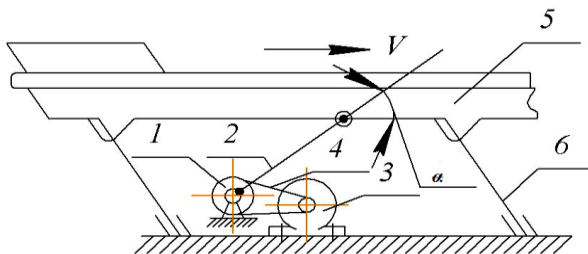


Рис. 90. Схема вибрационного раздатчика кормов

Как показал опыт использования вибрационных кормораздатчиков на фермах, целесообразны следующие параметры вибраций: амплитуда $A = 5-15$ мм; угловая частота $\omega = 40-80$ с⁻¹; угол $\alpha = 20-30$ °.

Совершенствование этих машин следует вести в направлении использования эффекта самосинхронизации вибровозбудителей или создания двухмассных уравновешенных конструкций.

Подобные конструкции вибротранспортеров широко применяются на предприятиях по переработке сельскохозяйственной продукции.

Транспортно-технологические машины на базе вибрационных винтовых подъемников показаны на рисунке 91 [32].

Вибрационный подъемник имеет грузонесущий орган, который представляет собой винтовой лоток, укрепленный на вертикальной колонне трубчатой типа; привод, упругие связи. Привод создает колебательное движение грузонесущего органа вдоль и вокруг вертикальной оси, необходимое для вибрационного перемещения транспортируемого груза.

Принципиальным отличием вибрационных подъемников от вибрационных конвейеров с прямолинейным грузонесущим органом является то, что амплитуда перемещения отдельных точек грузонесущего органа различна и пропорциональна расстоянию их от оси машины.

Вернемся к рисунку 91, где представлены основные принципиальные схемы транспортно-технологических подъемников. При выполнении операции просеивания, совмещенной с подъемом сыпучего груза, рабочий орган (рис. 91а и б) выполняют в виде двухходового винтового лотка, на верхней винтовой поверхности 1 которого устанавливают сито 2, а нижняя винтовая поверхность 3, где собирается и транспортируется подрешетный продукт, сплошная. При необходимости просеивание можно осуществлять с разделением на три класса (как в двухситном грохоте). В этом случае грузонесущий орган выполняют трехходовым – два винтовых лотка с просеивающей поверхностью и один сплошной.

При обработке материалов жидкостью (например, овощей и фруктов) можно часть грузонесущего органа помещать в емкость, наполненную обрабатывающей жидкой средой (рис. 91в).

Для эффективного отделения технологической жидкости винтовую поверхность выполняют перфорированной (рис. 91г) с наклоном в сторону несущей наклонны 2, на которой имеются отверстия (рис. 91д).

Вибрационные подъемники могут сочетать процесс транспортирования с сушкой или охлаждением насыпных грузов. Теплоноситель может перемещаться противотоком в пространстве

между нижней поверхностью лотка и верхним сводом груза (рис. 91е), дренажировать через перфорации в днище и затем пронизывать слой движущегося груза (рис. 91ж), пронизывать груз в месте его пересыпок с одного участка ступенчато укрепленного секторного лотка на другой (рис. 91з); обогреть или охладить поверхность лотка, следовательно, и груз, перемещаясь в газопроводе, примыкающем к грузонесущему органу (рис. 91и).

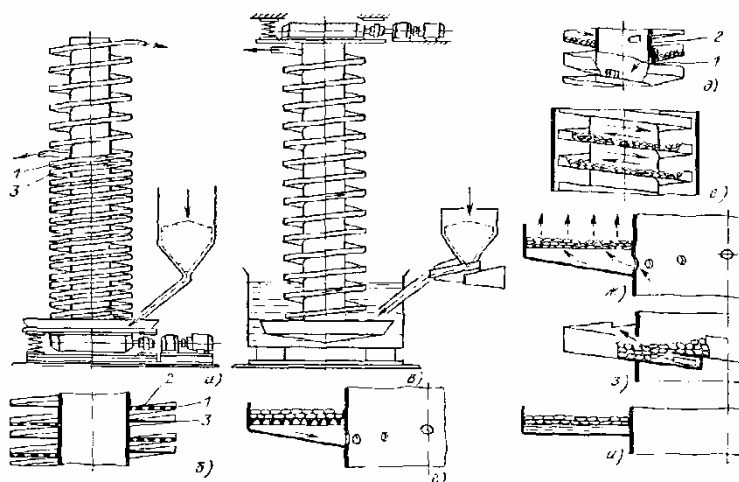


Рис. 91. Принципиальные схемы транспортно-технологических подъемников: а, б – для просеивания насыпного груза, в – для гидрообработки насыпного груза, г, д – для обезвоживания насыпного груза; е, и – для сушки перемещаемого насыпного груза

На рисунке 92 представлена одна из многочисленных конструкций *вибрационных зерноочистительных машин* (разработка компании «Интех», г. Воронеж).

Сепаратор предназначен для очистки зерна и семян, как самостоятельная единица, так и в составе технологической линии.

Зерно подается в приемный бункер сепаратора, равномерно распределяется по ширине решет, подающим устройством направляется в аспирационный канал очистки. Легкие и соломистые примеси уносятся восходящим воздушным потоком в оса-

дительную камеру. В осадительной камере легкие и солоmistые примеси отделяются от воздуха и шнеком выводятся из сепаратора. На верхнем решетном корпусе зерно двумя параллельными потоками движется по двум ярусам решет, где сходом отделяются крупные примеси. На нижнем решетном корпусе зерно делится на 3 потока. Проходо́вая фракция трех ярусов решет представляет собой мелкие примеси, а сходовая – основное зерно.

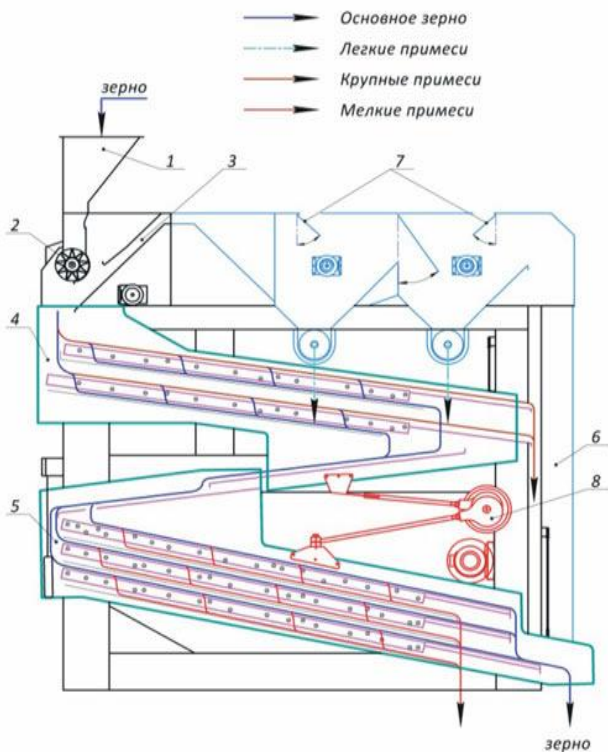


Рис. 92. Схема вибрационной зерноочистительной машины:
 1 – бункер приемный; 2 – подающее устройство;
 3 – аспирационный канал первичной очистки;
 4 – верхний решетный корпус; 5 – нижний решетный корпус;
 6 – аспирационный канал окончательной очистки;
 7 – осадительные камеры; 8 – привод решетных корпусов

На выходе с нижнего решетного корпуса организован аспирационный канал окончательной очистки зерна. Из зернового слоя через проницаемую поверхность восходящим потоком воздуха уносятся легкие примеси, которые отделяются от воздуха во второй осадительной камере и шнеком выводятся и сепаратора.

В сепараторе оптимально сочетаются производительность и качество очистки.

Большая производительность обеспечивается разделением зерновой массы на 2 и 3 параллельных потока зерна по верхнему и нижнему решетным корпусам.

Высокое качество очистки зерна (85%) достигается: двойной воздушной очисткой; последовательным прохождением двух решетных корпусов; регулированием наклона решет; оптимальным возвратно-поступательным движением решет; тонкой регулировкой в широком диапазоне значений: подачи продукта с помощью частотного регулятора, скорости воздушного потока на входе и выходе зерна из сепаратора, угла наклона решет.

Сепаратор за счет изменения угла наклона решет и регулировки подачи зерна имеет возможность работы в трех режимах: предварительная очистка; первичная (элеваторная) очистка; режим очистки семян.

Вибропривод представлен двумя эксцентриковыми механизмами, что позволило уравновесить динамические нагрузки от колеблющихся корпусов.

3. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО СЛОЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ВИБРОВОЗДЕЙСТВИЙ

3.1. Недостатки модели материальной частицы

В настоящее время модель материальной частицы является наиболее часто применяемой при описании вибрационных процессов. Как справедливо заметили И.И. Блехман и Г.Ю. Джанелидзе [15], задача о движении материальной точки по вибрирующей шероховатой поверхности играет в теории вибрационного перемещения не меньшую роль, чем уравнение движения осциллятора в теории линейных колебаний.

Модель одиночной материальной частицы является простейшим представлением зернистой среды. В технологических машинах всегда обрабатывается слой сыпучего материала, но, как уже указывалось, при сравнительно небольшой толщине и не слишком интенсивной вибрации, можно считать, что слой колеблется как единое целое и его движение можно рассматривать как движение материальной точки. Иными словами, изучение движения материальной точки дает в этом случае информацию о движении всего слоя материала.

Несмотря на фундаментальную роль, которую сыграла модель материальной частицы в теории вибрационных процессов, она имеет существенные недостатки, обусловленные в том числе введением дополнительных ограничений. Например, частицу представляют то плоской, то круглой. Не учитывается сопротивление воздуха, которое для легких сельскохозяйственных материалов может иметь существенное значение.

Если же такой моделью попытаться моделировать движение слоя частиц, то сомнения в ее адекватности еще более нарастают. Действительно, такая модель не учитывает сложное взаимодействия частиц друг с другом, влияние воздушного потока и т.д.

Модель материальной частицы беспомощна при объяснении появления циркуляционных и хаотических движений в слое сыпучего материала, а также при установлении условий бифуркаций.

Сходные проблемы в этой модели возникают при наклонных вибрациях платформы и возникновении транспортирования слоя. Множественность режимов движения, выявленная при аналитическом анализе, имеет, скорее всего, теоретический интерес. Практически же эти режимы трудно рассчитать и прогнозировать. Более или менее успешное применение модели одиночной материальной частицы для расчета скорости вибро-транспортирования объясняется введением в рабочие формулы одного или двух эмпирических (подгоночных) коэффициентов. В связи с этим рабочие формулы носят, скорее всего, не теоретический, а полуэмпирический характер.

Однако существуют модели материальной частицы, в отношении которых претензии по игнорированию воздушного потока снимаются. Речь идет о технологических процессах, проводящихся на плоских поверхностях, вибрирующих в своей плоскости. Речь идет о просеивающих и сортирующих рабочих органах, которые были рассмотрены ранее.

В этом случае при выполнении условий $D \gg h$ (где D – характерный размер рабочего органа, h – высота слоя сыпучего материала) в воздухе генерируются поперечные волны, которые быстро затухают.

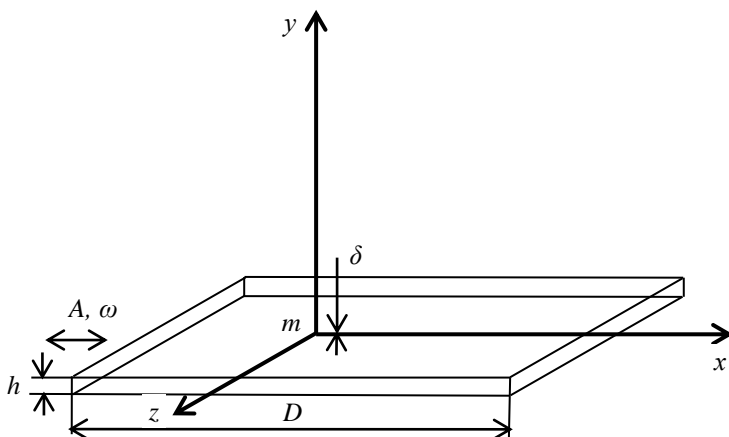


Рис. 93. Рабочий орган в виде плоской поверхности, вибрирующей в своей плоскости

Характерную глубину проникновения поперечных волн в воздушную среду в этом случае можно оценить по формуле:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad (343)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости воздуха (при $t = 20^\circ\text{C}$ он составляет $14,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$);

ω – угловая частота колебаний, чаще всего $\omega \approx 150 \text{ с}^{-1}$.

Для приведенных данных имеем следующую глубину проникновения поперечных волн:

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 14,9 \cdot 10^{-6}}{150}} \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} (\approx 0,5 \text{ мм}).$$

Таким образом, $h \gg \delta$. Это показывает, что действие воздушного потока при таком виде колебаний плоскости может не учитываться, что ведет к повышению адекватности модели одиночной материальной частицы. Тщательные опыты показывают, что при таких воздействиях нет превращения трения скольжения частиц в трение качения [56], как можно априори предположить. В связи с этим модели материальной частицы были широко представлены в предыдущих разделах данной книги именно для случаев вибраций рабочих поверхностей в своей плоскости.

3.2. Экспериментально наблюдаемые явления в вибрируемом слое сыпучего материала

Свободным слоем мы называем совокупность частиц, находящихся на рабочем органе с неудерживающими (односторонними) связями.

Слой условно характеризуется толщиной не менее 20-30 характерных размеров частиц, его составляющих.

При воздействии вибраций на слой сыпучего (зернистого, дисперсного) материала значительной толщины в нем наблюдается ряд эффектов, зависящих при прочих равных условиях от интенсивности этого воздействия.

При этом в слое, наряду с быстрыми вибрационными движениями, возникают согласованные медленные движения

частиц. По этим медленным (осредненным) составляющим движения динамические режимы воздействия вибраций можно разделить на три вида:

- 1) режим оседания слоя с уплотнением и относительным покоем;
- 2) режим вибрационной конвекции в разрыхленном слое с циркуляционными детерминированными потоками замкнутого типа;
- 3) режим хаотического (турбулентного) виброкипения слоя.

Рассмотрим поочередно эти режимы.

Режим 1. При ускорениях, не превышающих, как правило, земное, слой начинают приобретать подвижность, текучесть, частицы подходят ближе друг к другу, уменьшается число пор, слой уплотняется утряской (рис. 94). Наибольшее уплотнение достигается при амплитудных значениях ускорения близких к ускорению свободного падения (т.е. при $A\omega^2 / g \approx 1$). При этом процесс уплотнения занимает некоторое время, обычно не более 1...2 мин., а первоначальная высота слоя уменьшается на 10...20%.

Это явление широко применяется для уплотнения сыпучих материалов в железнодорожных вагонах, грузовиках, контейнерах, бункерах, мешках и т.д. При этом гарантированно считают, что перевозится на 10% больше сыпучего материала. Это означает уменьшение на 10% транспортных расходов на каждый логистический процесс.

Режим 2. При дальнейшем увеличении интенсивности вибраций слой в отдельные промежутки времени теряет контакт с вибрирующим рабочим органом, появляется осциллирующий воздушный поток, среда приходит в движение, появляются медленные циркуляционные движения сыпучего материала. Обычно по центру емкости частицы поднимаются вверх, а у стенок опускаются вниз (рис. 94). Слой при этом разрыхляется, увеличивается его высота, происходит некоторая сегрегация частиц по плотности и объему. Большие и легкие частицы обычно группируются сверху у стенок контейнера, периодически «ныряя» вглубь слоя. Но что удивительно, поток частиц по центру

может выносить вверх тяжелые частицы вплоть до металлических. Таким образом, по центру емкости на частицы действует подъемная сила. Рассмотрим подробнее, как она возникает. На рисунке 95а представлена схема приложенных к слою сил, а справа на рис. 95б – график затухания амплитуды колебаний слоя по мере удаления от виброднища.

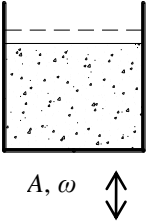
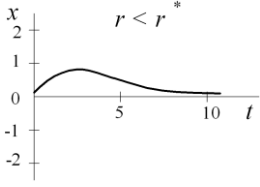
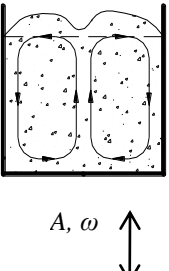
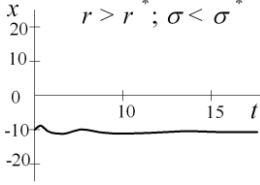
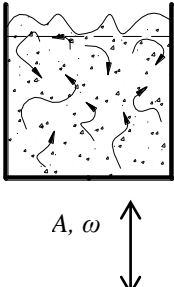
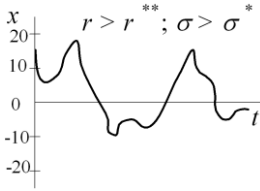
Режимы движения материала	Графическое представление решения уравнений (351)	Особенности поведения зернистого материала при вибрациях
 <p style="text-align: center;">A, ω \updownarrow</p>	 <p style="text-align: center;">$r < r^*$</p>	<p>Некоторое уплотнение материала, циркуляций нет, «дрожание» частиц среды, появление признаков виброоживления</p>
 <p style="text-align: center;">A, ω \updownarrow</p>	 <p style="text-align: center;">$r > r^* ; \sigma < \sigma^*$</p>	<p>Детерминированные (ламинарные) циркуляции, причем возникает один или множество очагов циркуляции (в зависимости от соотношения h/D), сегрегация компонентов по размерам и плотности</p>
 <p style="text-align: center;">A, ω \updownarrow</p>	 <p style="text-align: center;">$r > r^{**} ; \sigma > \sigma^*$</p>	<p>Хаотическое (турбулентное) виброкипение, интенсивное перемешивание среды</p>

Рис. 94. Основные динамические состояния сыпучей среды при вибрациях

В качестве исходного возьмем уравнение движения частицы в тонком слое сыпучего материала, которое мы рассматривали ранее (323). Однако теперь нельзя игнорировать для легких сельскохозяйственных частиц действие осциллирующего воздушного потока, который генерируется вибрационным рабочим органом.

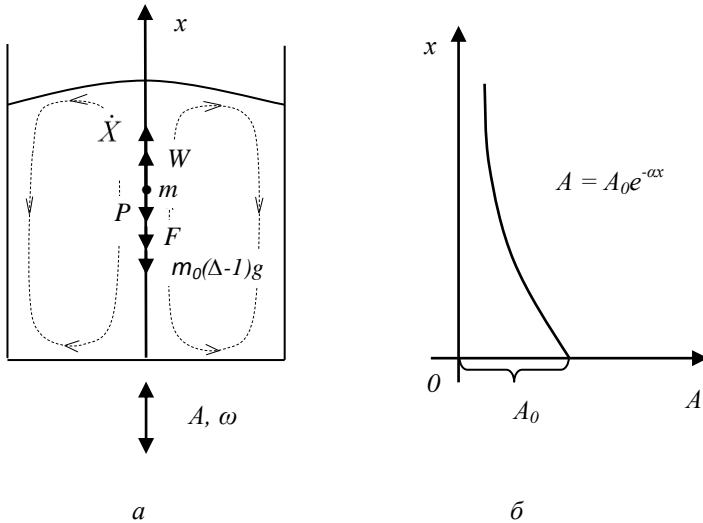


Рис. 95. Схема, поясняющая образование подъемной силы в центре емкости

Силу аэродинамического сопротивления частицы представим в виде [43]:

$$P = m_1 k \dot{x}^2 \text{sign} \dot{x}, \quad (344)$$

где \dot{x} – скорость частицы относительно среды, окружающей частицу;

k – коэффициент аэродинамического сопротивления частицы;

m_1 – как и прежде масса частицы с учетом присоединенной массы.

Следует указать, что в реальности окружающая частицу среда является двухскоростной: частицы имеют одну скорость, а воздух, движущейся в порах сыпучего материала, имеет бóльшую скорость. Нами здесь принимается, что скорости частиц и

воздушного потока одинаковы. Такое допущение может быть нивелировано увеличением коэффициента аэродинамического сопротивления k до необходимых пределов.

При слое большой толщины следует учесть затухание вибраций по мере удаления от рабочего органа. Многочисленными исследованиями доказано, что такое затухание следует экспоненциальному закону

$$A = A_0 e^{-\alpha x}, \quad (345)$$

где α – коэффициент затухания (определяется экспериментально).

С учетом этих дополнений уравнение (323) представим в виде:

$$m_1 \ddot{x} + F \operatorname{sign} \dot{x} + m_1 k \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} + m_0 (\Delta - 1) g = m_0 (\Delta - 1) A_0 e^{-\alpha x} \cdot \omega^2 \sin \omega t. \quad (346)$$

Обозначения оставлены такими, как в уравнении (323).

Обратим внимание, что уравнение (346) по форме совпадает с уравнением вынужденных колебаний, где в правой части представлена вынуждающая сила. Однако амплитуда этой вынуждающей силы зависит от координаты x и в данном случае асимметрична:

$$\Phi_0 = m_0 (\Delta - 1) A_0 \omega^2 e^{-\alpha x}. \quad (347)$$

Ранее мы уже говорили, что если в колебательной системе есть какая-то асимметрия, то это всегда приводит к направленному в среднем движению.

Поскольку в данном случае при движении частицы вверх сила Φ_{0+} больше, чем при движении частицы вниз Φ_{0-} (т.е. $\Phi_{0+} > \Phi_{0-}$), то следует ожидать, что частица будет перемещаться вверх. При этом возникает некоторая подъемная сила W , большая, чем сила $m_0 (\Delta - 1) g$, т.е. условие подъема частицы вверх можно записать в виде:

$$W \geq m_0 (\Delta - 1) g. \quad (348)$$

По существу, те же динамические силы, которые заставляют маятник Стефенсона-Капицы устойчиво стоять в верхнем положении, здесь заставляют частицу двигаться вверх.

Полученное уравнение (346) является очень сложным в связи с нелинейностью трех членов. Поэтому применим для его решения численный метод (функция `Odesolve` в программном

продукте Mathcad). Для этого исходное уравнение несколько упростим, разделив все члены на m_1 :

$$\ddot{x} + (F_1 / m_1) \text{sign} \dot{x} + kx^2 \text{sign} \dot{x} + \lambda g = \lambda A_0 \omega e^{-\alpha x} \sin \omega t ,$$

где $\lambda = (m_0 / m_1) (\Delta - 1)$.

На рисунке 96а представлены результаты компьютерного моделирования процесса подъема частицы вверх. Видно, что после участка неустановившегося движения подъема наступает стационарное зависание (левитация) частицы.

Будучи отесненной к периферии контейнера, частица опускается вниз (рис. 96б). Дело в том, что у вибрирующих стенок контейнера нет затухания амплитуды ($\alpha = 0$), следовательно, нет и подъемной силы.

Опустившись вниз, частица отесняется к центру контейнера, захватывается восходящим потоком и снова выносятся вверх. Так и возникает циркуляционное движение.

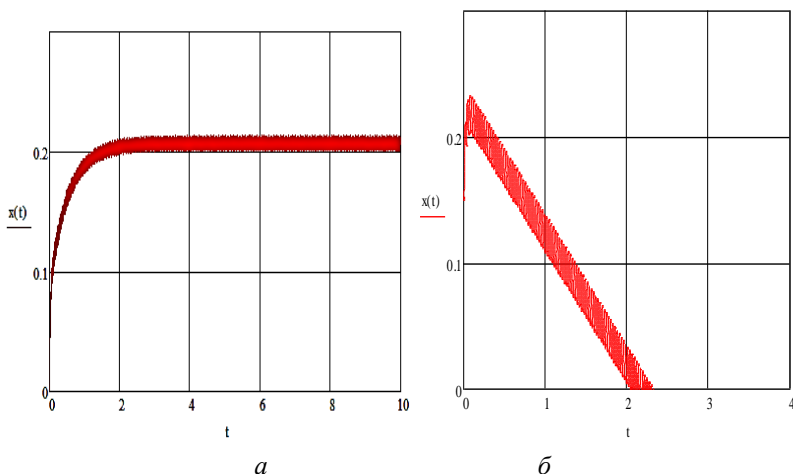


Рис. 96. Результаты компьютерного моделирования:
 а – подъема частицы по центру контейнера при $\alpha = 4$;
 б – опускания частицы у стенки контейнера при $\alpha = 0$

Режим 3. Если еще увеличить параметры вибраций, то получим хаотическое виброкипение слоя (т.н. виброкипящий

слой), при этом переход к этому режиму сходен с переходом ламинарного течения в турбулентное в истинных вязких жидкостях. Поэтому по аналогии с известным выражением для числа Рейнольдса, здесь можно предложить вибрационный аналог числа Рейнольдса в виде:

$$Re = \frac{A\omega h}{\nu}, \quad (350)$$

где h – высота слоя;

ν – эффективная кинематическая вязкость слоя сыпучего материала.

Критическое число Рейнольдса Re^* предстоит определить экспериментально.

В пограничных режимах возможно одновременное существование двух или даже трех отмеченных основных режимов. Например, в экспериментах наблюдалась картина: около днища контейнера уплотненное ядро, а сверху – циркулирующий слой, или даже зоны уплотнения, детерминированных и стохастических движений одновременно.

В технологических процессах используются все режимы движения сыпучей среды при вибрациях. Например, сушку, охлаждение и смешивание лучше всего осуществлять при динамическом состоянии сыпучей среды, соответствующем хаотическим циркуляциям, поскольку в этом случае наблюдаются наибольшее разрыхление и перемешивание массы. Дозирование, если речь идет об однородном материале, можно проводить в режиме ламинарных циркуляций. Такой режим для неоднородного материала приведет к некоторому его разделению. Чтобы избежать этого, нужно перейти в режим 3.

Как видим, динамика слоя сыпучего материала является чрезвычайно сложной, затрагивает проблемы турбулентности и много других проблем.

Предложено много моделей сыпучей среды при вибрациях (те же модели одиночной частицы), но они пригодны лишь для узкого изменения значений управляющих параметров. Для построения общей картины поведения рабочей среды, технологического процесса или машины во всем диапазоне управляющих параметров эти подходы совершенно неприемлемы. Они

не позволяют судить о динамике процессов, критериях управления ими и т.д. Ими не могут быть объяснены различные бифуркации, т.е. различные качественные перестройки в системе, возникающие внезапно в ответ на плавное изменение управляющих параметров, а также появление хаотических движений среды в отсутствие случайных воздействий. В конечном счете такие подходы сдерживают и решение задачи направленной организации структур в обрабатываемой среде с помощью внешних полей с целью получения продукции с заданными свойствами.

К концу 80-х годов прошлого века стало ясно, что методы классической механики не позволяют ответить на вопрос о том, что представляет собой динамика слоя сыпучего материала при вибрациях. Сложные пространственные структуры, возникающие в вибрируемом слое, невозможно было предсказать ни на основе господствующей модели одиночной частицы, ни на основе других традиционных подходов. Такие же проблемы возникали при рассмотрении многих других технологических процессов.

В это же время появились сведения о новых открытиях в биологии, физике, механике, химии. Суть этих открытий состояла, *во-первых*, в том, что в системах с большим числом частиц или особей (например, биологические сообщества, газы, сыпучие среды), где можно, казалось бы, ожидать большой хаотизации движений, они могут быть и регулярными, подчиняясь внутреннему порядку. Это явление было названо *самоорганизацией*, а наука – *синергетикой* (дословно – теорией совместного действия). *Во-вторых*, было показано, что хаотическое поведение проявляется в полностью детерминированных системах, входные воздействия которых не содержат случайной составляющей. Такие системы выступают в роли генераторов стохастичности, в отличие от давно известных систем – трансформаторов стохастичности.

Таким образом, порядок и хаос – две основные тенденции в эволюции и поведении динамических систем. Хаос возникает как предел, как свехсложная организация первоначальных структур, поэтому его изучение также входит в круг интересов синергетики.

3.3. Слой сыпучего материала при вибрациях как синергетическая система

Синергетические явления могут возникать только в системах, обладающих открытостью, нелинейностью, диссипацией.

Слой сыпучего материала при вибрациях можно рассматривать как систему, состоящую из множества элементов (составляющих частиц). Частицы испытывают как близкое действие в виде непосредственного контакта друг с другом, так и другие воздействия: механических вибраций рабочего органа и осциллирующего воздушного потока. Все эти взаимодействия носят *нелинейный характер*, обусловлены сухим трением между частицами, частицами и рабочим органом, сложными законами распространения в материале осциллирующего воздушного потока.

Слой сыпучего материала является *открытой системой*, поскольку она постоянно подпитывается энергией от вибрирующего рабочего органа. Особую роль в динамике открытых систем играет *диссипация* – рассеяние энергии посредством трения, ударов и т.д. Без диссипации невозможно образование различных структур в открытых системах. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство применяют термин «*диссипативные структуры*». Это понятие объединяет все виды структур: пространственные, временные, пространственно-временные. В слое сыпучего материала наблюдаются структуры типа ячеек Бенара, а также хаотические построения, изменяющиеся в пространстве и во времени. Возможно одновременное существование этих структур в одном и том же слое, разделённых пространственными рамками.

Появление всех этих структур указывает на наличие в рассматриваемых системах кооперативных (коллективных) действий элементов (частиц). Коллективное действие, как уже указывалось, обозначается термином «*синергетика*».

Таким образом, слой сыпучего материала при вибрациях в связи с нелинейностью явлений, открытостью, наличием диссипации является *синергетической системой*.

Математические модели синергетики должны отвечать перечисленным свойствам. В случае использования дифферен-

циальных уравнений последние к тому же должны быть чувствительны к начальным условиям.

Картина поведения сыпучих сред, подверженных вибрациям, во многом напоминает (вплоть до образования регулярных структур и хаоса) поведение подогреваемого снизу слоя вязкой жидкости. Поведение последнего демонстрирует собой традиционный пример самоорганизации – возникновение структуры из шестигранных призматических ячеек (ячеек Бенара). Общую модель термоконвекции построил в 1963 году американский физик-метеоролог Э. Лоренц [47, 55]. Это была первая математическая модель синергетики.

Модель Лоренца появилась в результате целенаправленного поиска решений, которые могли бы объяснить появление ячеек Бенара как регулярных структур, развитие хаоса в системе с термоконвекцией. В конечном счете эта модель дает сценарии перехода ламинарного движения среды в турбулентное по мере развития неустойчивостей, связанных с усилением подогрева слоя вязкой жидкости.

Известна также модификация обычной конвекции, проявляющаяся в жидких кристаллах (нематиках). Вместо градиента температуры на пластинки, между которыми располагается нематик, подается переменное электрическое поле. При определенном потенциале возникают структуры, подобные конвекции Бенара-Релея, называемые доменами Вильямса. Дальнейшее увеличение напряжения или частоты приводит также к разнообразным неустойчивостям и, в конечном счете, к турбулентности.

Модель Лоренца описывается системой из трех нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x); \\ \dot{y} = rx - y + xz; \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (351)$$

В этих уравнениях x, y, z – переменные; σ, r, b – управляющие параметры. Точкой в уравнениях (351) обозначено дифференцирование по безразмерному времени (для вибрационных процессов $\tau = \omega t$).

При определенных сочетаниях управляющих параметров решение этой модели не выходит ни на стационарный, ни на периодический режим. Такое решение показано на рисунке 97 (режим 3). Видно, что происходят колебания величины x , причем перескоки из положительной области в отрицательную происходят хаотично. Все дело в том, что решения системы Лоренца в этом случае оказываются неустойчивыми. Разность двух решений быстро растет со временем, даже если их начальные данные были очень близки. Поскольку реальные начальные данные известны всегда с некоторой погрешностью, то наши возможности предсказывать поведение системы оказываются ограниченными. То, что нельзя точно предсказать ход процесса, не проследив его весь, сближает систему Лоренца с вероятностными задачами.

Физический смысл переменных x , y , z и параметров σ , r , b был установлен для вибрационных процессов исходя из аналогии данной задачи с задачей термоконвекции в истинной вязкой жидкости с образованием ячеек Бенара. В реальной жидкости поток энергии появляется за счет подогрева жидкости снизу, различий в плотности частиц и появлению подъемной силы.

В слое сыпучего материала подобный поток энергии и подъемная сила, приводящая к циркуляции частиц, обусловлены действием вибраций. Мы видели, что при вертикальной вибрации контейнера подъемная сила направлена снизу вверх. При сопоставимых размерах слоя (т.е. $h \approx D$) экспериментально наблюдается одна ячейка типа Бенара. Частицы при помощи вибраций поднимаются по центру вверх, там оттесняются к периферии и опускаются вниз. Последнему обстоятельству способствует то, что у стенок контейнера, в силу гидродинамического принципа прилипания, нет затухания воздушного потока, а следовательно, и отсутствует подъемная сила. Опустившуюся вниз частицу опять подхватывает поток материала, поднимает вверх. За счет этих явлений и возникает циркуляционные потоки частиц.

Ярким свидетельством существования подъемной силы служат опыты по вибрационной обработке плохо воздухопроницаемых материалов (например, измельченного мела). При определенных параметрах вибраций такое сыпучее тело, как твердый предмет, поднимается над вибрирующим дном и

левитирует (зависает), соответственно, между ним и дном образуется воздушная прослойка (каверна).

Возвращаясь к уравнениям (351), укажем, что величина x пропорциональна скорости циркуляции составляющих слоя, y – разности амплитуд колебаний между восходящими и нисходящими потоками, z – пропорциональна отклонению вертикального профиля амплитуд колебаний слоев от линейного.

Управляющими параметрами динамики виброоживленного слоя являются критерии

$$r = \frac{A\omega^2}{g}; \quad \sigma = \frac{A\omega h}{v}; \quad b \approx \frac{h}{D}, \quad (352)$$

где A , ω – амплитуда и угловая частота вибраций;

v – эффективная кинематическая вязкость сыпучей среды;

h – высота (толщина) слоя;

D – поперечный размер контейнера (рабочего органа) с сыпучим материалом.

При достижении управляющими параметрами некоторых критических (бифуркационных) значений σ^* , r^* или r^{**} движение слоя сыпучей среды качественно изменяется.

Можно выделить, теперь уже анализируя модель Лоренца, три основных динамических состояния (режима движения) сыпучей среды при вибрациях (рис. 96):

1. *Покой* (за исключением небольшого движения, связанного с уплотнением среды). Наблюдается при $r < r^*$, причем для среды без сцепления ($r^* \approx 1$).

2. *Циркуляционные движения* составляющих сыпучей среды. Они напоминают ячейки Бенара в подогреваемом слое вязкой жидкости. Возникают такие движения при $r > r^*$ и $\sigma < \sigma^*$ и носят детерминированный (ламинарный) характер. Они являются результатом самоорганизации сыпучей среды под воздействием вибраций.

3. *Хаотическое (турбулентное) движение* сыпучей среды. Достигается при втором критическом значении параметра r , т.е. при $r > r^*$ и $\sigma > \sigma^*$. Обратим внимание на то, что на вход рассматриваемой системы подается чисто синусоидальное воздействие, а отклик ее – хаотический. Следовательно, речь идет о генерировании хаотичности, или о детерминированном хаосе.

Наиболее наглядно существование трех основных динамических состояний сыпучего материала при вибрациях, представляет диаграмма, построенная в плоскости параметров r - σ (рис. 97).

Она позволяет весьма просто, если известны бифуркационные значения управляющих параметров, выбирать режимы работы и конструктивные параметры вибрационных технологических машин.

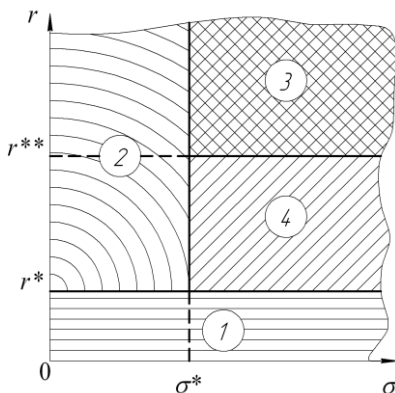


Рис. 97. Диаграмма динамических состояний слоя сыпучего материала при вибрациях: 1 – уплотнение и покой; 2 – детерминированные (ламинарные) циркуляции; 3 – стохастические (турбулентные) циркуляции; 4 – состояние, характеризующееся комбинацией состояний 1, 2 и 3

Экспериментально установлено, что значение r^* практически не зависит от относительной высоты слоя h/D , как и утверждает теория Лоренца, однако изменяется при переходе от одного материала к другому. Для фуражного и продовольственного зерна $r^* = 1...2$; дерти, комбикорма – 2...4; хлебопекарной и мясокостной муки, измельченного мела, кофе, различных кормовых микродобавок (типа монокальций фосфат) – 4...5. Большие показатели в последнем случае объясняются высокой адгезией и когезией данных продуктов. Динамическое поведение существенно зависит от дисперсности (тонкости измельчения) материала. Дело в том, что при некотором малом размере частиц

силы контактного взаимодействия (молекулярного сцепления) превосходят силы тяжести. Указанное условие разделяет все сыпучие материалы на грубодисперсные (цельное фуражное и продовольственное зерно и т. п. материалы) и тонкодисперсные (травяная, хлебопекарная, мясо-костная мука, измельченный мел, кофе и т. д.).

Значения r^{**} и σ^* существенно зависят от относительной высоты слоя материала h/D (рис. 99). Ее увеличение приводит для грубодисперсных материалов к возрастанию значения r^{**} , а для тонкодисперсных – наоборот, к уменьшению бифуркационного значения параметра r . Объяснение данного явления следует искать в различной воздухопроницаемости и связности этих материалов. Увеличение толщины слоя тонкодисперсного материала приводит к тому, что воздух плохо фильтруется через него, и слой сначала поднимается как одно целое с последующим прорывом воздуха в случайных местах по поперечному сечению контейнера. Подобное различие в поведении грубодисперсных и тонкодисперсных материалов наблюдается и по параметру σ .

Таким образом, выявляется довольно всеобъемлющая роль критерия h/D . Следовательно, управлять динамическим состоянием обрабатываемого материала можно не только одним изменением параметров вибрации, как обычно считается, но также варьированием толщины слоя.

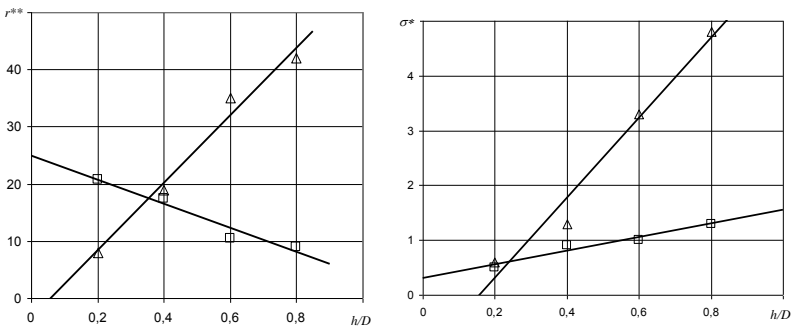


Рис. 99. Зависимость бифуркационных значений параметров r и σ от относительности высоты слоя h/D :

Δ – грубодисперсные материалы; □ – тонкодисперсные материалы

Многочисленные эксперименты, проведенные в Алтайском ГАУ, подтвердили изложенные положения. В частности, технологическая эффективность вибрационных машин, в которых обрабатывается свободный (т.е. с односторонними (неудерживающими) связями) слой сыпучего материала в основном зависит от перечисленных критериев подобия. Например, конечную однородность θ сыпучих смесей при проведении операции смешивания можно представить в виде функциональной зависимости:

$$\theta = f\left(\frac{A\omega^2}{g}; \frac{A\omega h}{v}; \frac{h}{D}\right).$$

Перечисленные критерии включают кинематические режимы вибрационной обработки (A , ω), технологические свойства сырья (v) и геометрические параметры рабочего органа (h , D).

Критерии подобия позволяют строить типоразмерный ряд машин требуемого функционального назначения.

Выше были рассмотрены вертикальные вибрации. Но диссипативные структуры возникают и при других типах вибраций. Рассмотрим это на примере вибрационной конвекции.

На рисунке 100 представлены фрагменты перехода сыпучей среды от симметричной системы (вертикальные вибрации) к несимметричной (эллиптические и круговые вибрации – имеет определенное направление траектории) и затем снова к симметричной, но с горизонтальными вибрациями. Таким образом, при эллиптических и круговых вибрациях имеет место кинематическая анизотропия.

Из рисунка следует, что по мере перехода от вертикальных колебаний к круговым один из контуров циркуляции уменьшается, совсем исчезая при круговых колебаниях. При этом сыпучий материал в контейнере образует уклон с некоторым углом α (рис. 100). Установление одного контура циркуляции не влияет на характер движения сыпучей среды – он остается ламинарным. Однако при переходе некоторых граничных значений характеристик вибрации, и при круговых колебаниях также наступает хаотическое движение сыпучей среды, причем исчезает угол наклона верхней поверхности среды к горизонту, т.е. угол α становится равным нулю.

Подобные же переходы от двухконтурной к одноконтурной циркуляции отмечены И.Ф. Гончаревичем для случая действия прямолинейных горизонтальных и наклонных вибраций.

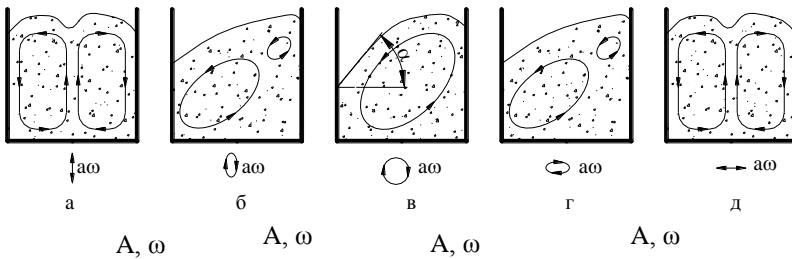


Рис. 100. Схемы, поясняющие действие различных схем приложения вибраций

3.4. Примеры вибрационных устройств с обработкой слоя сыпучего материала значительной толщины

Уплотнение транспортируемых материалов. Для уплотнения укладываемой в тару соленой и свежей рыбы широко применяют различные безударные вибрационные и ударно-вибрационные машины, сообщающие таре прямолинейные вертикальные или горизонтальные колебания. Такие машины обеспечивают быстрое и достаточно плотное заполнение тары при сохранении товарного вида рыбы. Подлежащая укладке и уплотнению рыба непрерывно подается питателем в вибрирующую тару. Одна из таких машин изображена на рисунке 101. На станине 2 установлен электродвигатель 1, сообщающий движение эксцентриковому виброприводу 6. Последний вызывает горизонтальные колебания рамы 5. На раму устанавливают бочку, которую закрепляют между подвижной 4 и неподвижной 3 щеками зажимного устройства. Зажимающее усилие создает показанный слева пневмоцилиндр. Амплитуда перемещения бочки около 10 мм, частота около 10 Гц, производительность машины 20-25 бочек в час.

Вибрацию используют для уплотнения различных сыпучих, кусковых и штучных материалов, укладываемых в различную тару (чашки, пакеты, коробки, банки, контейнеры, ящики, бочки и т.д.), а также погружаемых непосредственно в емкости транспортных средств.

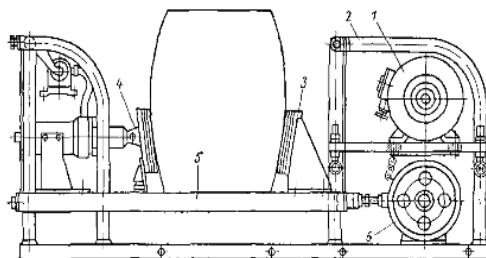


Рис. 101. Схема машины для укладки и уплотнения рыбы

Сушилка виброкипящего слоя (рис. 102) представляет собой желобчатый виброконвейер с двойным днищем, верхнее из которых – беспровальная решетка. На решетку загружается материал, который транспортируется вдоль нее слоем под действием вибрации решетки.

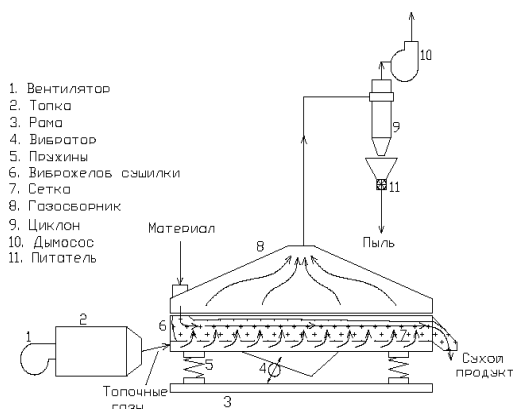


Рис. 102. Сушилка виброкипящего слоя (ВКС) с лотковым горизонтальным виброконвейером с продувкой теплоносителя через слой материала

Высота транспортирующего слоя, как правило, составляет 100÷200 мм. Под решетку подводится горячий воздух, который, проходя через нее и слой материала, выводится из аппарата дымососом через циклон в атмосферу. Под действием вибрации слой сыпучей среды хорошо разрыхляется и частицы в нем интенсивно перемешиваются, что создает благоприятные условия для прохождения через него сушильного агента.

Максимальная скорость продувки газообразного теплоносителя через сушилку должна быть не больше скорости витания частиц, подлежащих сушке.

По структуре данная сушилка относится к системам идеального перемешивания по материалу и идеального вытеснения по газу, т.е. ей присущи все отмеченные преимущества протекания тепло- и массообмена в кипящем слое. Кроме того, поскольку вибрация создает пульсирующий режим продуваемого газа через слой, то повышается эффективность теплопередачи от газа к частицам материала (растет коэффициент теплоотдачи), что, в конечном итоге, приводит к повышению на 20% эффективности процесса сушки зернистых сред в виброкипящем слое по сравнению с сушкой в кипящем слое.

Вибрационный смеситель (рис. 103) представляет собой цилиндрическую камеру смешивания 2, прикрываемую сверху крышкой 1. Снизу камеры 2 установлено гибкое виброднище 3. Оно соединено шатуном 4 с эксцентриковым виброприводом 5, который снабжен электродвигателем 7. В гибком виброднище 3 имеется выгрузное отверстие 12, которое при помощи гофры 11 соединено с выгрузным патрубком 9, перекрываемым заслонкой 10. Вся конструкция смесителя установлена при помощи стоек 6 на основании 7.

Исходные компоненты для смешивания загружаются в камеру смешивания 2 сверху. После включения электродвигателя 8 виброднище 3 совершает прямолинейные вертикальные колебания. Колебательные движения передаются обрабатываемому материалу, который в зависимости от параметров вибраций может иметь различные динамические состояния. После завершения процесса смешивания открывается заслонка 10, и готовая смесь, проходя через выгрузное отверстие 12, гофру 11 и патрубок 9, выгружается из смесителя.

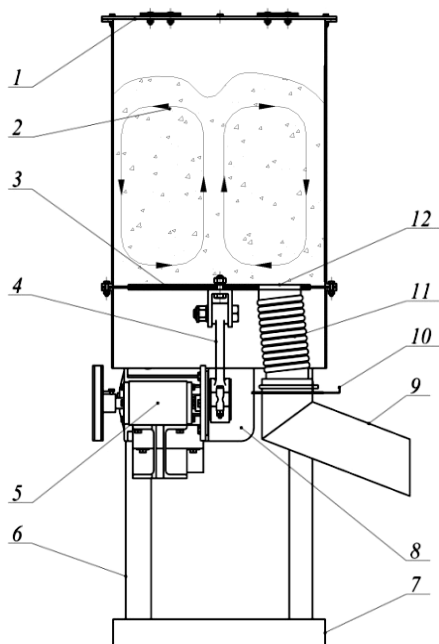


Рис. 103. Общий вид вибрационного смесителя с гибким рабочим органом [141]

Смеситель имеет возможность совершать колебания амплитудой A , равной 3, 5, 7 или 9 мм, путем смены эксцентров в вибровозбудителе 5 (рис. 104). Частота колебаний ω неизменна и составляет около 150 рад/с.

Смеситель работает в режиме хаотического перемешивания составляющих сыпучей кормовой смеси (режим 3).

4. ВИБРОРЕОЛОГИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

4.1. Общие положения

К исследованию эффектов вибраций можно подойти и по-другому, с позиций науки реологии.

Как известно, под *реологией* понимается область механики, в которой изучаются деформации и текучесть различных сред и тел, причем основное внимание уделяется развитию этих явлений во времени.

Виброреология представляет раздел механики, в котором изучается изменение под влиянием вибраций реологических свойств тел и сред, а также соответствующие медленные движения тел [18].

Постоянные, входящие в реологические уравнения (модуль упругости, коэффициенты вязкости, предельные напряжения сдвига, текучести и т.д.), называют реологическими постоянными или реологическими характеристиками.

Практика показывает, что вибрации не только изменяют значения этих характеристик, но и сами реологические уравнения. Не раз уже отмечалось, например, о переходе при вибрациях сухого трения в разряд вязкого.

Изменения реологических свойств может быть двух типов.

Первый тип обусловлен изменением реологических характеристик по отношению к медленным силам или движениям. Здесь речь идет о чисто механическом эффекте вибраций, который сразу исчезает при выключении вибрации. Хотя эффект исчезает, но остаются следствия его действия, например хорошо перемешанный материал, или, например, материал, разделенный на фракции. Такой эффект мы уже рассматривали в разделе, посвященном разжижению при вибрациях сыпучей среды.

Второй тип изменения реологических свойств связан не с кажущимся, а с действительным изменением реологических характеристик в тиксотропных и нелинейно-вязких системах.

Очевидно, что могут одновременно проявиться оба перечисленных типа действия вибраций на реологические характеристики материалов.

В данном разделе изучается изменение свойств первого типа, т.е. проявление чисто механических свойств вибраций по отношению к медленным силам и движениям.

4.2. Универсальная реологическая модель сельскохозяйственных материалов

Ряд технологических процессов (гранулирование, брикетирование, дробление некоторых сельскохозяйственных материалов, уплотнение силоса и сенажа в траншеях и башнях и т.д.) осуществляется в стесненном слое материала. Силы тяжести здесь не имеют существенного значения, поскольку малы в сравнении с действующими нагрузками со стороны рабочих органов. Как показывают эксперименты, в стесненном слое отсутствуют какие-либо циркуляционные потоки материала, вследствие чего нет массообмена между отдельными областями слоя, а энергия переносится в основном посредством распространения волн.

Подобное положение дел наблюдается и при обработке почвы вибрирующими рабочими органами.

Поэтому для стесненного слоя актуальна научная задача определения сопротивления материала различным деформациям, обусловленного внутренним трением, а также эволюция этого сопротивления во времени (релаксация напряжений). В связи со сказанным встает проблема обоснованного выбора соответствующей реологической модели стесненного слоя материала органического происхождения.

Реологическая модель должна иметь внутреннюю и внешнюю адекватность, то есть отражать выявленный механизм рассеяния энергии колебаний в материале в виде ползучести деформаций, релаксации напряжений, упругого последствия и т.д. Некоторые из этих явлений не могут быть объяснены в рамках простых моделей и требуют применения сложных механических моделей, включающих в себя различное сочетание упругих, вязких и пластичных элементов.

Большинство материалов органического происхождения (сыпучие и волокнистые корма, пищевые продукты, древесностружечные материалы и т.д.), а также почвы при воздействии

на них статической и динамической механической нагрузки демонстрируют вязкоупругие свойства. В частности, они проявляются в развитии деформации во времени (ползучесть) при постоянной нагрузке и релаксации напряжений при фиксации деформации. Сопротивление, оказываемое вязкоупругим материалом сжатию, сдвигу и вообще формоизменению, которым слой подвергается в различных технологических процессах (гранулирование, брикетирование, смешивание, дозирование и т.д.), существенно зависит от соотношения скоростей приложения деформаций и релаксации напряжений. Если первая скорость преобладает над второй, то материал в большей степени проявляет упругие свойства, энергия накапливается, освобождаясь при снятии нагрузки в виде обратного расширения слоя (обратной ползучести). И, наоборот, при доминировании скорости релаксации напряжений происходит усиление процессов рассеивания энергии в деформируемом слое, вследствие чего он оказывает меньшее сопротивление сжатию или сдвигу и слабее расширяется после снятия нагрузки.

Введенная модель должна поэтому отражать поведение стесненного слоя как в динамических, так и статических условиях.

Перечисленным требованиям отвечает реологическая модель Бюргера, являющаяся комбинацией упругих и вязких элементов (рис. 104). Модель довольно универсальна: ею можно моделировать реологические свойства, например, кормов, и с таким же успехом, почв.

Если к модели Бюргера приложить постоянное напряжение p , то прежде всего произойдет мгновенное сжатие пружины E_1 (рис. 105а), далее – постепенное сжатие пружины E_2 и перемещение поршня η_2 , а также поршня η_1 .

В результате общая деформация модели будет возрастать с течением времени. Это явление носит название ползучести. На рисунке 106 показана программа нагружения и ниже – график деформации модели. Участок OA соответствует мгновенному сжатию пружины E_1 , AB – постепенному сжатию пружины E_2 и перемещению поршней η_1 и η_2 , то есть ползучести.

При снятии нагрузки пружина E_1 мгновенно разожмется (участок BC). Пружина E_2 благодаря действию поршня η_2 будет

разжиматься в течение некоторого времени (явление обратной ползучести или упругого последействия (участок CD)).

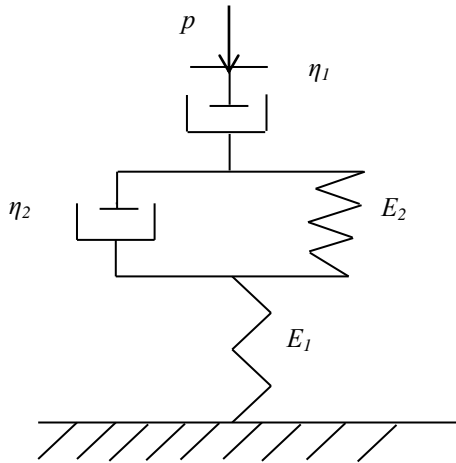


Рис. 104. Линейная реологическая модель Бюргера

И, наконец, поршень η_1 после снятия нагрузки не изменит своего положения, демонстрируя тем самым остаточную деформацию N .

Если модель Бюргера подвергнуть мгновенному сжатию и её свободный конец зафиксировать, тем самым поддерживая $\varepsilon = const$, то со временем пружины заставят поршни перемещаться (рис. 105б). По мере продвижения поршней пружины будут разжиматься, а напряжение в модели будет уменьшаться. Это явление носит название релаксации напряжений.

Обычно остаётся, при неограниченном увеличении времени, небольшое напряжение M .

Для модели Бюргера $M = 0$.

Материалы, демонстрирующие рассмотренные свойства, называют в современной литературе *вязкоупругими*. Однако для обозначения этих свойств существует и другой термин – *наследственная упругость*, введенный Вольтеррой. По мнению некоторых специалистов, второй термин представляется более точным и лучше отражающим существо дела.

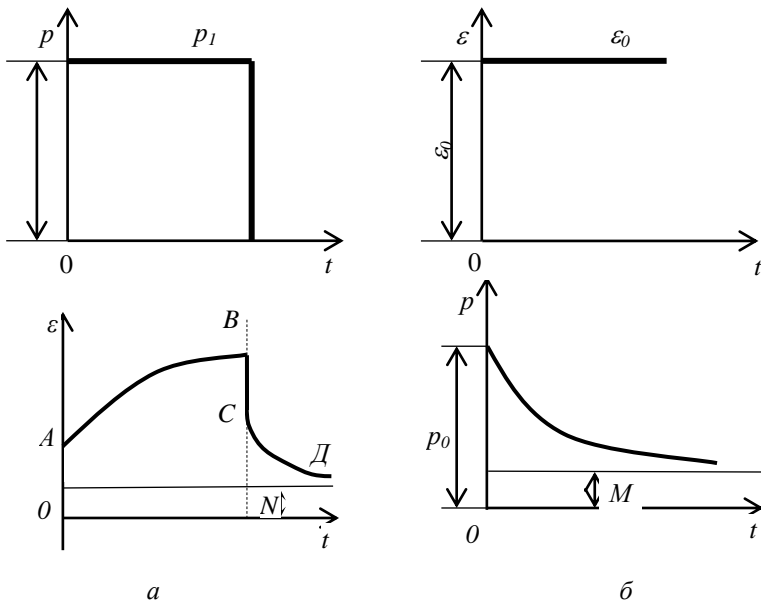


Рис. 105. Кривые ползучести деформаций (а) и релаксации напряжений (б) для модели Бюргерса

Механические модели дают лишь схематизированное и качественное отображение реальных реологических процессов, протекающих в материалах. Количественного же соответствия с опытными данными механические модели, как правило, не дают.

Поэтому чаще для описания реологических свойств различных материалов используют так называемую *наследственную теорию* Больцмана-Вольтерры, которая записывается в виде интегрального уравнения:

$$p(t) = E\varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad (353)$$

где p – напряжение, МПа;

ε – относительная деформация;

E – мгновенный модуль упругости материала, МПа;

τ – переменная интегрирования, изменяющаяся от 0 до t ;

$\Gamma(t - \tau)$ – ядро интегрального уравнения.

Ядро может быть принято в форме, предложенной В.И. Особовым [89]:

$$\Gamma(t - \tau) = \frac{p_0 - M}{\varepsilon_0 T_p} \exp\left(-\frac{t - \tau}{T_p}\right), \quad (354)$$

где p_0, ε_0 – начальные напряжения и деформация;

M – предел релаксации или остаточное напряжение, к которому стремится $p(t)$ при неограниченном увеличении времени;

T_p – время релаксации, в течение которого релаксирующая часть напряжений уменьшается в $e = 2,71 \dots$ раза (e – основание натуральных логарифмов).

Время релаксации для почв составляет порядка 0,17-0,18 с (по М.Д. Подскребко); для сено-соломистых материалов, в зависимости от приложенного давления от 3,3 с (при $p = 24$ МПа) до 6,6 с (при $p = 50$ МПа, данные В.И. Особова).

Аналогичное (354) уравнение для деформации имеет вид:

$$\varepsilon(t) = p(t) / E + \int_0^t K(t - \tau) p(\tau) d\tau, \quad (355)$$

где $K(t - \tau)$ – резольвента интегрального уравнения.

Резольвента также носит экспоненциальную форму:

$$K(t - \tau) = \frac{N - \varepsilon_0}{p_0 T_n} \exp\left(-\frac{t - \tau}{T_n}\right),$$

где N – предельная относительная деформация, к которой стремится $\varepsilon(t)$ при неограниченном времени выдержки;

T_n – время ползучести, в течение которого относительная деформация $(N - \varepsilon_0)$ ползучести уменьшается в $e = 2,71 \dots$ раза.

Пусть теперь вязкоупругое тело подвергается периодическому нагружению по гармоническому закону (для удобства перейдем к комплексным переменным):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\omega t). \quad (356)$$

По истечении некоторого времени напряжение будет весьма мало отличаться от периодической функции с тем же периодом. Для получения решения рекомендуется вместо не-

ограниченного увеличения времени t принять нижний предел в уравнении (353) равным не нулю, а отрицательной бесконечности. Уравнению (353) мы удовлетворим, положив, что

$$p(t) = p_0 \exp(i\omega t + i\delta^*). \quad (357)$$

Подставив эти значения в уравнение (353), получим равенство:

$$p_0 \exp(i\omega t + i\delta^*) = E\varepsilon_0 \left[\exp(i\omega t) - \frac{1}{E} \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \right]. \quad (358)$$

Заменив переменную интегрирования $t-\tau=z$ и учитывая, что $\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$, выражение (358) приведем к следующему виду:

$$p_0 \exp(i\omega t + \phi) = E\varepsilon_0 \exp(i\omega t) [1 - \Gamma_c / E + i\Gamma_s / E], \quad (359)$$

$$\text{где } \Gamma_c = \int_0^{\infty} \Gamma(z) \cos \omega z dz; \quad \Gamma_s = \int_0^{\infty} \Gamma(z) \sin \omega z dz. \quad (360)$$

Введем обозначения:

$$E'(\omega) = E - \Gamma_c; \quad E''(\omega) = \Gamma_s. \quad (361)$$

Комбинация $E'(\omega) + iE''(\omega) = E^*$ называется комплексным модулем.

Уравнение (359) может тогда быть переписано в форме обычного закона Гука, но только с комплексным модулем упругости:

$$p = (E' + iE'')\varepsilon = E^* \varepsilon. \quad (362)$$

Из последнего выражения следует, что

$$p_0 = \varepsilon_0 \sqrt{E'^2 + E''^2}; \quad \operatorname{tg} \delta^* = \frac{E''}{E'} = \frac{\Gamma_s}{E - \Gamma_c}. \quad (363)$$

В последней формуле фигурирует угол потерь δ^* , показывающий запаздывание напряжения относительно деформации. Тангенс угла δ^* служит безразмерной мерой рассеивания энергии вязкоупругой средой. Тангенс угла потерь определяет

такие физические показатели, как затухание свободных колебаний и распространяющихся волн.

Угол потерь δ^* не связан с особенностями колебательной системы вибрационной машины, а определяется всецело характеристиками обрабатываемого сырья. Для кормов и кормовых добавок этот угол составляет $30-70^0$ [57]. Наименьшее значение относятся к соли среднего помола, среднее – к материалам типа комбикорма, большие – к измельченным сено-соломистым материалам. Уплотнение этих кормов и добавок перед началом измерений составляло $30-40\%$ (по высоте слоя), частота вынужденных колебаний при измерениях – 150 с^{-1} .

Таким образом, видим, что при деформировании вязкоупругого тела напряжение p сдвинуто по фазе относительно результирующей деформации ε (рис. 106).

Комплексный модуль упругости E^* содержит действительную E' и мнимую E'' части, из которых первая синфазна с деформацией ε , а вторая сдвинута по фазе на 90^0 . В результате получается, что комплексный модуль упругости E^* сдвинут по фазе относительно деформации ε на угол потерь δ^* .

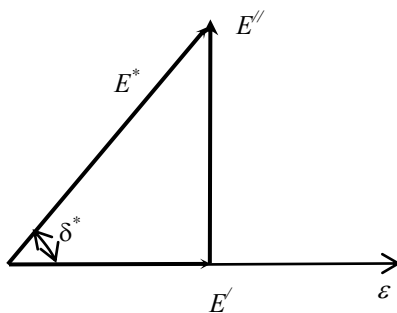


Рис. 106. Комплексный модуль упругости E^* и его составляющие E' и E''

На основе введенных моделей решаются некоторые практические задачи, возникающие при действии вибраций на стесненный слой органического материала. В следующем пункте это демонстрируется на анализе затухания вибраций в стесненном слое.

4.3. Распространение вибраций в стесненном слое сельскохозяйственного материала

Знание закономерностей распространения вибраций в толще материала требуется при оценке зоны воздействия вибраций, что в свою очередь предопределяет схемы расположения вибро-возбудителей, их число, рабочие параметры вибромашин и т. д.

При воздействии вибрационной нагрузки на стесненный слой в нем возникает сложное поле напряжений, изменяющееся в пространстве и во времени. Эти возмущения могут передаваться в виде продольных волн (сжатия-растяжения) или поперечных (сдвиговых) волн (рис 107).

Поперечные волны быстро затухают в пространстве. Поэтому для технологии большее значение имеют продольные волны. Скорость их распространения зависит от свойств самого материала (плотности, упругих свойств) и равна скорости распространения продольных звуковых волн.

Для большинства зернистых (зерно, комбикорм и т.д.) и сено-соломистых материалов скорость c распространения звуковых волн лежит в пределах 10...60 м/с. При реально используемых частотах вибраций $\omega = 100...300\text{с}^{-1}$ длину волны можно оценить по формуле: $\lambda = cT = c \cdot \frac{2\pi}{\omega} = (0,21 - 3,77) \text{ м}$.

Волновые свойства слоя нужно учитывать лишь при его толщине h , большей длины волны λ . Обязательно такой учет необходим для процессов вибропобуждения материала к истечению в крупных бункерах и силосах, уплотнения сенажа и силоса в траншеях и башнях.

В вибрируемом свободном слое (виброкипящем слое) сыпучего материала отмечаются очень малые скорости распространения вибраций, и, соответственно, малые длины волн [19].

Поэтому здесь также необходим учет волновых свойств слоя. Например, в вибрационном смесителе толщина слоя h доходит до 0,6 м. Следовательно, может укладываться $(0,6/0,21 \approx 3)$ почти три волны.

В почве, в зависимости от ее состава и влажности скорости распространения вибраций составляют 90-230 м/с [92].

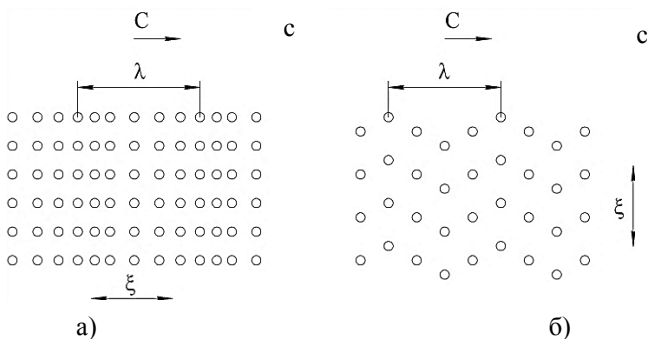


Рис. 107. Схематичное изображение смещения частиц в продольной (а) и сдвиговой (б) волнах

В зависимости от соотношения между размером h вязкоупругого слоя и длиной волны λ возможны три принципиально различных случая распределения амплитуд смещения по мере удаления от источника колебаний (рис. 108):

если $h \gg \lambda$, то практическое затухание колебаний по длине происходит в слое материала, толщина которого меньше расстояния h ;

если h и λ сопоставимы, то распределение амплитуд смещений определяется как размерами h , так и свойствами среды;

если $h \ll \lambda$, то поле деформации будет практически однородным, а распределение смещений по длине независимо от свойств среды – либо линейным, либо близким к линейному.

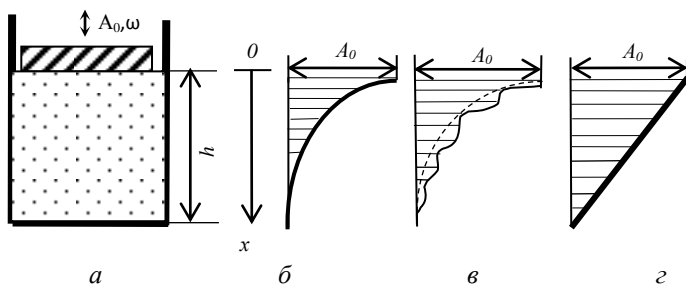


Рис. 108. Схема возбуждения продольных волн в материале (а) и распределение амплитуд колебаний по мере удаления от источника колебаний в случаях: б) $h \gg \lambda$; в) $h \approx \lambda$; г) $h \ll \lambda$

Известно, что движение упругой среды описывается волновым уравнением:

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (364)$$

где E – модуль упругости;

ξ – смещение точек среды в направлении x ;

ρ – плотность слоя.

Для того, чтобы применить уравнение к сельскохозяйственным материалам, характеризующимся вязкоупругими свойствами, воспользуемся принципом соответствия, который заключается в формальном переходе:

$$E \rightarrow E^* = E' + iE'' ,$$

где $E^* = E' + iE''$ – комплексный модуль, содержащий действительную E' и мнимую E'' части.

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее распространение волн в вязкоупругом материале, будет иметь следующий вид:

$$(E' + iE'') \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (365)$$

Рассмотрим сначала распространение вибраций в неограниченной ($h \gg \lambda$) вязкоупругой среде. Пусть на границе этой среды $x=0$ задано смещение (для упрощения вычислений перейдем к функциям комплексного переменного):

$$\xi = A_0 \cos \omega t = A_0^* (\cos \omega t + i \sin \omega t) = A_0^* \exp(i \omega t), \quad (366)$$

где A_0^* – комплексная амплитуда, действительная часть которой совпадает с амплитудой ($Re A_0^* = A_0$).

Будем искать решение уравнения (365) в виде:

$$\xi = A_0^* \exp[i(\omega t - \gamma x)], \quad (367)$$

где γ – постоянная, смысл которой станет понятен из последующего изложения.

Подставим выражение (367) в исходное уравнение (365), тогда получим: $(E' + iE'')\gamma^2 = \rho\omega^2$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого равенства, имеем

$$\sqrt{E' + iE''} \cdot \gamma = \omega \sqrt{\rho}. \quad (368)$$

Поскольку в любой неограниченной среде распространение колебаний представляет собой бегущую волну, то это означает, что величина γ является также комплексной:

$$\gamma = \beta_1 - i\beta_2. \quad (369)$$

С учетом того обстоятельства, что

$$\sqrt{E' + iE''} = \sqrt{|E^*| (\cos \delta^* + i \sin \delta^*)} = \sqrt{|E^*|} \left[\cos(\delta^*/2) + i \sin(\delta^*/2) \right],$$

выражение (368) запишем в виде:

$$\left[\cos(\delta^*/2) + i \sin(\delta^*/2) \right] (\beta_1 - i\beta_2) = \omega \sqrt{\rho / |E^*|}.$$

Перемножая комплексные числа, стоящие в левой части последнего выражения, приходим к уравнению

$$\left[\beta_1 \cos(\delta^*/2) + \beta_2 \sin(\delta^*/2) \right] + i \left[\beta_1 \sin(\delta^*/2) - \beta_2 \cos(\delta^*/2) \right] = \omega \sqrt{\rho / |E^*|}.$$

Действительные и мнимые величины левой и правой частей этого уравнения должны быть равны. Отсюда имеем два уравнения:

$$\left[\beta_1 \cos(\delta^*/2) + \beta_2 \sin(\delta^*/2) \right] = \omega \sqrt{\rho / |E^*|};$$

$$\left[\beta_1 \sin(\delta^*/2) - \beta_2 \cos(\delta^*/2) \right] = 0,$$

решая которые, находим значения β_1 и β_2 :

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{|E^*|}} \cos \frac{\delta^*}{2}; \quad (370)$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{|E^*|}} \sin \frac{\delta^*}{2}. \quad (371)$$

Таким образом, решение (367) имеем право переписать в следующей форме:

$$\xi = A_0 \exp(-\beta_2 x) \exp[i(\omega t - \beta_1 x)],$$

или в обычной записи

$$\xi = A_0 \exp(-\beta_2 x) \cos(\omega t - \beta_1 x). \quad (372)$$

Первый сомножитель $\xi(x) = A_0 \exp(-\beta_2 x)$ этого выражения характеризует изменение амплитуды колебаний слоев материала по мере удаления от источника колебаний. Затухание следует экспоненциальному закону (рис. 108, б), что было неоднократно подтверждено в экспериментах. Коэффициент пространственного затухания вибраций β_2 подсчитывается по формуле (371). Из нее следует, что он пропорционален частоте вибрационного воздействия, то есть высокочастотные вибрации затухают значительно, чем низкочастотные, что также отмечалось на практике.

Величина β_1 представляет собой фазовую постоянную или волновое число. Эта постоянная, как известно, характеризует пространственную периодичность волнового процесса и связана с длиной волны λ соотношением: $\beta_1 = 2\pi / \lambda$.

На рисунке 109 показаны типичные для сельскохозяйственных материалов и продуктов экспериментальные кривые затухания вибраций по мере удаления от источника колебаний. Практическое затухание вибраций осуществляется на расстоянии от источника 0,5...0,6 м, хотя для гранулированных сред и материалов высокой плотности эти расстояния могут увеличиться в 2...3 раза.

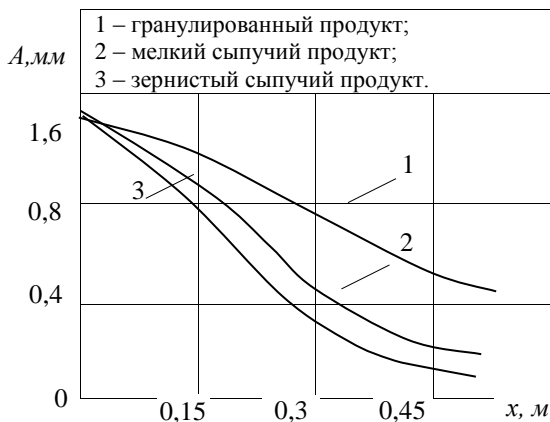


Рис. 109. Экспериментальные кривые затухания вибраций в массиве обрабатываемого материала (по И.Ф. Гончаревичу)

Рассмотрим и другой аномальный случай распространения вибраций, когда слой очень тонкий, значительно меньше длины волны ($h \ll \lambda$). В частности, данная задача актуальна для процессов вибропрессования гранул и брикетов.

Для *тонкого слоя* материала можно пренебречь затуханием вибраций и рассматривать их распространение для упругой среды в соответствии с уравнением (364). Решение этого уравнения имеет вид:

$$\xi = \left(B \sin \frac{\omega x}{c} + D \cos \frac{\omega x}{c} \right) \cos \omega t,$$

где B и D – коэффициенты, зависящие от граничных условий.

Для схемы, изображенной на рисунке 109, граничными значениями будут:

$$1) \xi = A_0 \text{ при } x = 0;$$

$$2) \xi = 0 \text{ при } x = h.$$

Их учет приводит к выражению:

$$\xi = A_0 \left(\cos \frac{\omega x}{c} - \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c} \sin \frac{\omega x}{c} \right) \cos \omega t. \quad (373)$$

Малая толщина слоя материала означает, что аргументы тригонометрических функций стремятся в пределе к нулю:

$$\frac{\omega h}{c} = 2\pi \frac{h}{\lambda} \rightarrow 0; \quad \frac{\omega h}{c} \rightarrow 0.$$

Тогда можно положить, что $\cos \frac{\omega x}{c} \approx 1$; $\operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c} \approx \frac{c}{\omega h}$;

$$\sin \frac{\omega x}{c} \approx \frac{\omega x}{c}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (373), находим

$$\xi = a_0 (1 - x/h) \cos \omega t. \quad (374)$$

Таким образом, амплитуда колебаний в тонком слое материала, подверженного вибрациям, распределена по линейному закону (рис. 109г).

4.4. Использование вибраций для управления реологическими свойствами стесненного слоя

При экспериментальных исследованиях выявляются новые эффекты, не объяснимые с позиций линейной реологии. В частности, хорошо известны явления ускорения при вибрациях процессов релаксации напряжений и ползучести деформаций. Это создает дополнительные возможности управления с помощью вибраций реологическими характеристиками обрабатываемого сырья.

Знание закономерностей реологического поведения сельскохозяйственных материалов требуется при проектировании различных технологических машин (в частности, уплотняющих), так как именно эти свойства определяют рабочие режимы, а порой и работоспособность данного конструкторского решения. Поэтому важно изыскать способы управления реологическим состоянием обрабатываемых материалов, что позволило бы ускорить протекание технологических процессов. Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о значительном влиянии вибраций на процессы релаксации напряжений и ползучести деформаций в материалах, особенно при низких напряжениях. Вибрации уменьшают не только время релаксации и ползучести, но и пределы этих величин, причем снижение это весьма существенно.

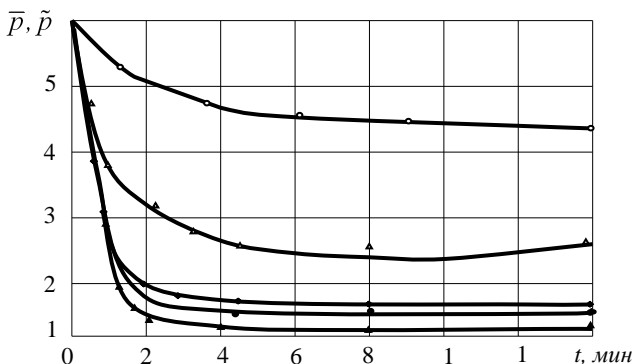


Рис. 110. Кривые статической (1) и вибрационной (2...5) релаксации напряжений: 2) $A=0,5$ мм; $\omega=60$ с⁻¹; 3) $A=0,5$ мм; $\omega=180$ с⁻¹.

Материал – кормосмесь влажностью $W = 11,7\%$

В опытах на кормовой смеси, состоящей из 70% резки ко-стра безостого и 30% комбикормов, время релаксации сокраща-лось в 6,4 раза, предела релаксации – в 4,2 раза в сравнении со статическим нагружением (рис. 110). Необходимо отметить, что релаксационные кривые при виброн нагружении, представленные на рисунке, получены методом средних с действительных кри-вых, записанных осциллографом, и являются их статической интерпретацией.

Уже говорилось, что сопротивление, оказываемое вязко-упругим материалом сжатию или сдвигу, зависит от соотноше-ния между скоростями его деформации и релаксации напряже-ний в нем.

Традиционно указанное соотношение скоростей достига-ли варьированием скорости деформации материала, поскольку реологическими свойствами управлять сложно или экономиче-ски невыгодно (например, путем дополнительного нагрева, из-мельчения материала и т.д.).

Например, при формировании гранул и брикетов стара-ются придать рабочим органам малые скорости и дополни-тельно выдерживать сформированные изделия под нагрузкой с таким расчетом, чтобы время выдержки было больше времени релаксации напряжений. Изделия в этом случае не распадают-ся после выхода из прессовальной камеры, но такой путь при-водит к ограничению производительности уплотняющих машин.

Вибрации позволяют управлять, как мы видели, скоростя-ми реологических процессов в слое материала, следовательно, увеличить скорости рабочих органов и достичь большей произ-водительности. Если же скорость деформации остается преж-ней, то дополнительное наложение вибраций должно снижать усилия со стороны рабочих органов и повышать качество полу-чаемых изделий. Для экспериментального подтверждения этих выводов были проведены опыты по статическому и вибрацион-ному сжатию кормовой смеси, состоящей из 30% сеной резки и 70% комбикормов (рис. 111).

Из графика следует, что вибрации снижают давления, тре-буемые для уплотнения, однако с увеличением степени уплот-нения эффект вибраций проявляется слабее. Например, если при

степени уплотнения $\rho / \rho_0 = 2$ вибрации снижают требуемое давление на 35%, то при $\rho / \rho_0 = 3$ эффект вибрации достигает всего 5...6%.

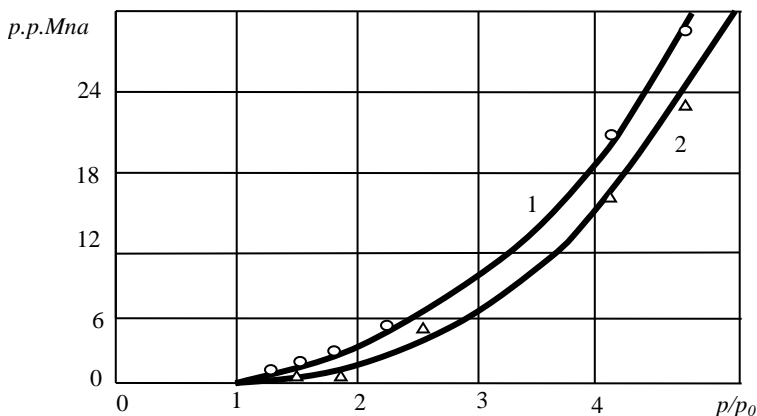


Рис. 111. Зависимости степени уплотнения кормосмеси ($W = 11,7\%$) от приложенного давления в слое:
 1 – статическое уплотнение; 2 – вибрационное уплотнение

Объясняется это следующим. На ранних стадиях сжатия кормосмеси преобладают структурные деформации слоя, осуществляемые за счет проскальзываний частиц относительно друг друга и их более плотной укладки при действии вибраций. Это приводит к существенному снижению требуемых давлений. С увеличением степени уплотнения подвижность частиц снижается, деформация слоя осуществляется за счет деформации отдельных частиц (пластическая стадия), и роль вибраций снижается.

Положительное влияние вибрации проявляется также в меньшем расширении слоя после снятия нагрузки. По характеру кривых (рис. 112) можно заключить, что спрессованные из кормосмеси образцы в наибольшей степени расширяются в первые пять минут после извлечения из прессовальной камеры, затем скорость расширения уменьшается, приближаясь к нулю. При этом образцы с повышенным содержанием стебельных частиц расширяются больше, чем образцы с преобладающим содержанием комбикорма.

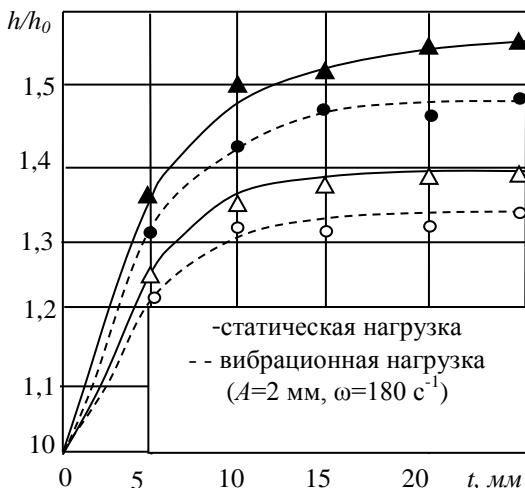


Рис. 112. Зависимость упругого расширения спрессованных образцов из кормосмеси от времени, прошедшего после нагрузки:

1 – кормосмесь, содержащая 30% сеной резки, 2-70% сеной резки (остальное – комбикорм)

Различие между действием статической и вибрационной нагрузок выражается по показателю h/h_0 (высота образца после и до расширения) цифрой порядка 0,06...0,10. Это позволяет получить для образцов, сформированных вибрационной нагрузкой, приращение конечной плотности 60...70 кг/м 3 , что имеет немаловажное значение для снижения крошимости.

4.5. Нелинейная реологическая модель как модификация модели Бюргера

Большое практическое значение имеет установление физических причин, вызывающих ускорение процессов релаксации и ползучести при вибрациях. В этой связи важно выяснить, возможно ли прогнозирование реологических свойств кормов при действии вибраций, если известны вязкоупругие характеристики, полученные в статических испытаниях.

Попытки использования для этих целей известных в реологии линейных тел, составленных из вязких и упругих элемен-

тов, показали, что явления виброползучести и виброрелаксации не могут быть объяснены в рамках этих модельных представлений и теорий.

В связи с этим линейная модель, изображенная на рисунке 105, также не будет показывать виброреологических эффектов. Поэтому будем анализировать поведение материала при вибрациях при помощи нелинейной модели, представленной на рисунке 113.

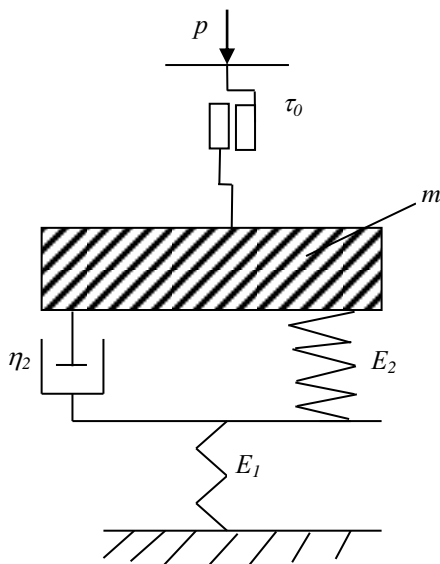


Рис. 113. Нелинейная реологическая модель слоя органического материала

Модель состоит из элементов Гука E_1 и E_2 , Ньютона η_2 , Сен-Венана τ_0 , а также инерционного элемента m . Два последних элемента в совокупности и моделируют особенности явлений виброползучести и виброрелаксации.

В этой модели элементы Гука отображают упругость каркаса материала, вязкие – сжатие и движение воздуха в порах слоя. Элемент Сен-Венана характеризует сухое (кулоново) трение, возникающее между частицами при их скольжении относительно друг друга. И, наконец, масса m характеризует инерци-

онные свойства слоя, которые приобретают существенное значение при динамических, в условиях вибраций, нагружениях.

Для решения некоторых задач вполне допустимо нелинейную характеристику элемента Сен-Венана линеаризовать, а в результате сам этот элемент заменить элементом Ньютона с условным динамическим коэффициентом вязкости η_1^* .

Однако начнем с рассмотрения поведения модели в статических условиях. Если параметры модели подобраны таким образом, что во всем диапазоне нагрузок $p < \tau_0$, то элемент Сен-Венана τ_0 как бы превращается в твердый недеформируемый стержень, а вся модель – в модель стандартного вязкоупругого тела (по другой терминологии – в модель Максвелла-Томсона). Это модель хорошо изучена.

Поведение такой модели под напряжением p описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} p_1 &= \varepsilon_1 E_1; \\ p_2 &= \varepsilon_2 E_2 + \eta_2 d\varepsilon_2 / dt; \\ p_1 &= p_2 = p; \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (375)$$

где ε , ε_1 , ε_2 – общая деформация в модели и деформация в отдельных элементах;

E_1 , E_2 – модули упругости;

η_2 – динамический коэффициент вязкости.

На основе системы (375) проводится анализ механических свойств различных материалов. Особенно важны два частных решения, представляющих практический интерес: а) ползучесть (нагрузка постоянна, напряжение изменяется во времени); б) релаксация напряжений (деформация постоянна, напряжение изменяется во времени).

Уравнение ползучести имеет вид:

$$\varepsilon = p \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - \exp(-\frac{E_2 t}{\eta_2})) \right]. \quad (376)$$

Анализ этого уравнения показывает, что при приложении в момент $t = 0$ постоянной нагрузки p_0 материал получает мгновенную деформацию ε_0 , впоследствии деформация нарастает, стремясь к некоторому пределу (рис. 114 а, кривая 1).

Уравнение релаксации напряжений не приводим в связи с его громоздкостью, характер же изменения этой величины хорошо виден из рисунка 114б (кривая 1).

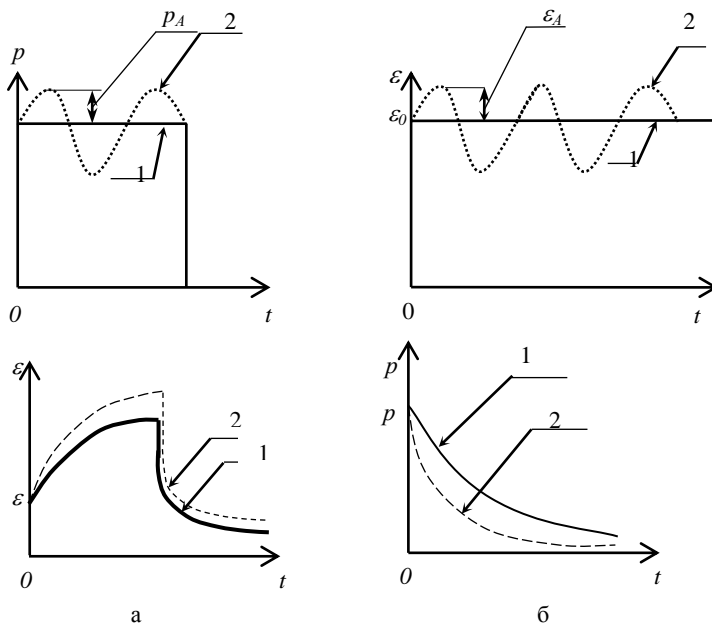


Рис. 114. Ползучесть деформаций (а) и релаксация напряжений (б): 1 – при статических испытаниях; 2 – при вибрационных испытаниях

Рассмотрим теперь вибрационное нагружение модели по закону:

$$p = p_0 + p_A \sin \omega t, \quad (377)$$

где p_A – амплитудное значение напряжения;

ω – угловая частота вибраций.

При достижении некоторой интенсивности вибраций и выполнения условия:

$$m\omega^2 + \varepsilon_1 E_1 > \tau_0 \text{ (или } p + p_A > \tau_0) \quad (378)$$

в элементе Сен-Венана начинается проскальзывание пластинок и их относительное движение со скоростью:

$$v = V + A\omega \cos \omega t,$$

где A , ω – амплитуда и частота вибраций;

V – скорость поступательного движения, которую в первом приближении можно принять постоянной.

Соппротивление в элементе Сен-Венана (рис. 115 а) представляет собой силу сухого трения, т.е. $\tau = \tau_0 \text{sign} v$.

Вид этой нелинейной (разрывной) функции представлен на рисунке 115 а.

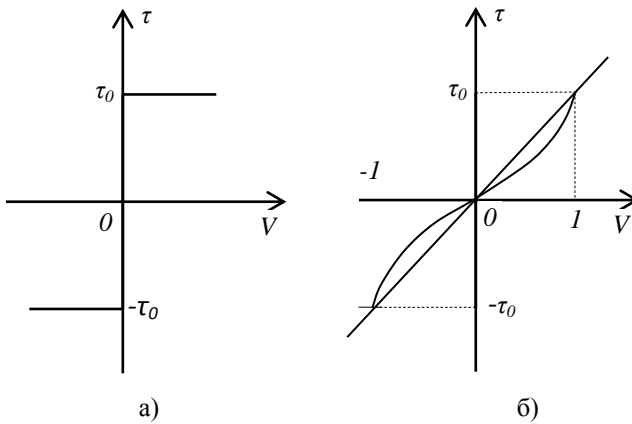


Рис. 115. Характеристика сопротивления в элементе Сен-Венана (а) и её сглаживание (линеаризации) при вибрациях (б)

В разделе 2.1.3 мы видели, что в условиях вибраций происходит сглаживание характеристики сухого трения, как бы трансформация сухого трения в вязкое. Для нашего случая имеем:

$$\tau = \tau_0 \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{V}{A\omega},$$

или приближенно:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\tau_0}{A\omega} \cdot V.$$

Как видим, элемент Сен-Венана превращается при вибрациях (по отношению к осредненным нагрузкам) в элемент Ньютона,

поскольку сопротивление зависит от скорости V (рис. 115 б). Этот эффект однако имеет место лишь при выполнении условия:

$$V / A\omega < 1. \quad (379)$$

Как известно, в элементе Ньютона имеет место соотношение:

$$\tau = \eta_1 d\varepsilon_1 / dt$$

Следовательно, для соблюдения размерности величин нужно положить

$$\eta_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\tau_0}{\omega}; \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{V}{A}$$

Таким образом, элемент сухого трения при вибрациях трансформируется в элемент Ньютона с коэффициентом динамической вязкости η_1 , зависящим от частоты вибраций ω .

Вся же реологическая модель превращается (по отношению к действию осредненных сил) в модель Бюргерса, для которой уравнение ползучести имеет вид:

$$\varepsilon = p_0 \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2 t}{\eta_2}\right) \right] + \frac{t}{\eta_1} \right\}.$$

Подставляя в это выражение значение η_1 , будем иметь

$$\varepsilon = p_0 \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2 t}{\eta_2}\right) \right] + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega t}{\tau_0} \right\}. \quad (380)$$

Сравнивая выражения, видим, что слагаемое в последнем выражении

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{\tau_0} \cdot \omega t = \Delta\varepsilon \quad (381)$$

представляет собой дополнительную деформацию, обусловленную действием вибраций (рис. 115а).

Следует заметить, что кривые виброползучести и виброрелаксации, представленные на рисунке 115 – осреднение действительных кривых, являются их статической интерпретацией.

Точно также можно показать, что в результате действия вибраций возникает интенсификация процесса релаксации напряжений (рис. 115б).

Эффекты виброползучести и виброрелаксации являются управляемыми и зависят от частоты вибраций ω (выраже-

ние 380), виброскорости $A\omega$ (выражение 379) и виброускорения $A\omega^2$ (выражение 376), то есть, в конечном счете – от частоты и амплитуды колебаний. Физически названные явления объясняются тем, что в результате воздействия вибраций отдельные частицы получают большую возможность проскальзывать относительно друг друга и укладывается более плотно. Иными словами, возрастает доля структурных деформаций в слое, а доля пластических деформаций самих частиц уменьшается.

Таким образом, явления виброползучести и виброрелаксации могут быть объяснены в рамках нелинейных реологических моделей. Для этого не нужно привлекать дополнительные гипотезы (о разогреве материала под действием вибраций и др.). Линеаризация нелинейного элемента τ_0 в таких моделях представляет собой не просто математическую абстракцию, а отражает реальные явления в слое при действии вибраций по отношению к медленным силам (силы веса, сжимающих сил со стороны рабочих органов и т. д.).

4.6. Виброреология взаимодействия вибрационных рабочих органов и почвы

Сопротивление большинства почвообрабатывающих орудий может быть рассчитано на основе рациональной формулы В.П. Горячкина:

$$P(V) = fG + kav + \varepsilon a\varepsilon V^2, \quad (382)$$

где P – сила тяги трактора или общее сопротивление почвообрабатывающей машины;

G – вес машины;

f – коэффициент трения рабочих органов о почву;

a, v – глубина обработки и ширина пласта;

k – удельное сопротивление почвы резанию;

V – рабочая скорость;

ε – коэффициент пропорциональности.

Таким образом, этой формулой утверждается, что почва сопротивляется обработке вследствие трения (первый член формулы), деформации (второй член) и инерции (третий член).

В.П. Горячкин полагал, что третий член его формулы обусловлен отбрасыванием почвы в сторону. Более поздними исследованиями было установлено, что первый и второй члены также в некоторой степени зависят от скорости орудия [92].

Здесь мы будем считать, что первый и второй член представлены некоторыми средними величинами, а третий член аккумулирует все зависимости от скорости.

Приспособим формулу (382) для случая, когда рабочий орган, дополнительно к основному движению со скоростью V , будет совершать продольные колебательные движения с амплитудой A и частотой ω .

В этом случае полная скорость v рабочего органа определится формулой:

$$v = V + A\omega \cos \omega t, \quad (383)$$

причем предполагается, что $A\omega > V$.

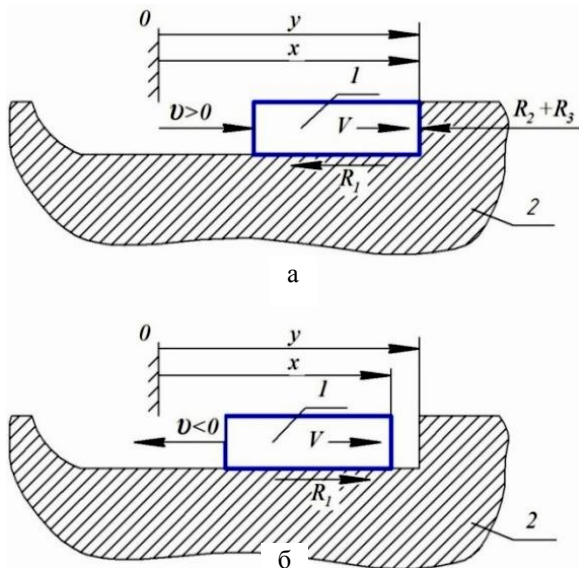


Рис. 116. Схема, поясняющая взаимодействие рабочего органа с почвой: а – при деформировании почвы; б – при отходе рабочего органа назад

Последнее условие утверждает, что рабочий орган будет перемещаться относительно почвы, не только вперед, в направлении технологически необходимого движения, но и назад. Это положение иллюстрируется рисунком 116, где рабочий орган изображен в виде деформатора 1 простой формы, взаимодействующего с почвой 2. Технологически требуемое перемещение со скоростью V направлено вправо.

Формула В.П. Горячкина не дает какой-либо информации по типу деформации почвы. Если для движения с постоянной скоростью это особо не требуется при расчетах сопротивления, то для вибрационных рабочих органов это весьма существенно.

Идеализируем почву в виде вязко-пластичной среды. Это означает, что при отходе рабочего органа назад (рис. 116 б) лобовина рабочего органа теряет контакт с почвой.

То же самое иллюстрирует рисунок 117, где представлен совмещенный график скорости $v(t)$ и перемещения $x(t)$ лобовины рабочего органа, а также перемещения $y(t)$ среза почвы, контактирующей с лобовиной рабочего органа.

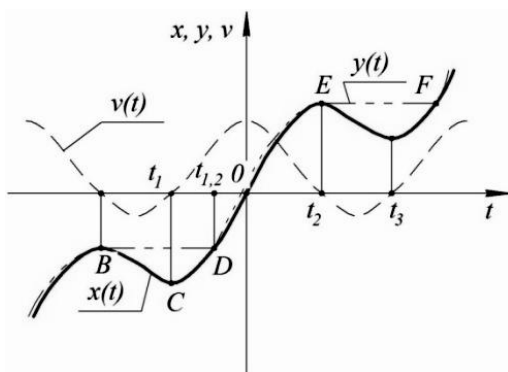


Рис. 117. Совмещенный график перемещения $x(t)$ и скорости $v(t)$ рабочего органа, а также кривая перемещения почвы $y(t)$ для $V / (A\omega) = 0.5$

Видно, что при $V / (A\omega) < 1$ рабочий орган совершает движения не только вперед (например, за время $t_1...t_2$), но и

назад (например, в промежуток времени $t_2 \dots t_3$). Сами моменты времени t_1 , t_2 и t_3 соответствуют остановкам рабочего органа, поскольку $v = 0$.

Моменты остановки рабочего органа найдем из выражения:

$$v = V + A\omega \cos \omega t = 0;$$

$$t_1 = -\frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{V}{A\omega}\right); \quad (384)$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{V}{A\omega}\right); \quad t_3 = -\frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{V}{A\omega}\right) + \frac{2\pi}{\omega}.$$

Кривая $y(t)$ движения грунта перед лобовиной рабочего органа (штрихпунктирная линия на рис. 117) не совсем соответствует кривой движения рабочего органа. Есть участки по времени (один из них обозначен на рисунке отрезком BD), где лобовина рабочего органа при его отходе назад отрывается от почвы. Причем почва в этом случае остается неподвижной.

Введем далее следующие обозначения для формулы Горячкина:

$$\bar{R}_1 = fG; \quad \bar{R}_2 = kav; \quad \bar{R}_3 = \varepsilon av^2. \quad (385)$$

Для вибрационных рабочих органов выражение (382) представим в таком виде

$$P = R_1 + R_2 + R_3, \quad (386)$$

$$\text{где } R_1 = \bar{R}_1 \text{sign}v; \quad (387)$$

$$R_2 = \begin{cases} \bar{R}_2 & \text{при } x = y \text{ и } v > 0, \\ 0 & \text{при } x < y; \end{cases} \quad (388)$$

$$R_3 = \begin{cases} \bar{R}_3 & \text{при } x = y \text{ и } v > 0. \\ 0 & \text{при } x < y. \end{cases} \quad (389)$$

При этом движение границы почвы, контактирующей с рабочим органом, происходит только при $x = y$ и $\dot{x} > 0$, поэтому уравнение движения этой границы будет следующим:

$$\dot{y} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < y \text{ или при } x = y \text{ и } \dot{x} < 0; \\ \dot{x} & \text{при } x = y \text{ и } \dot{x} > 0. \end{cases}$$

Усредним за период колебаний составляющие R_1 , R_2 и R_3 .

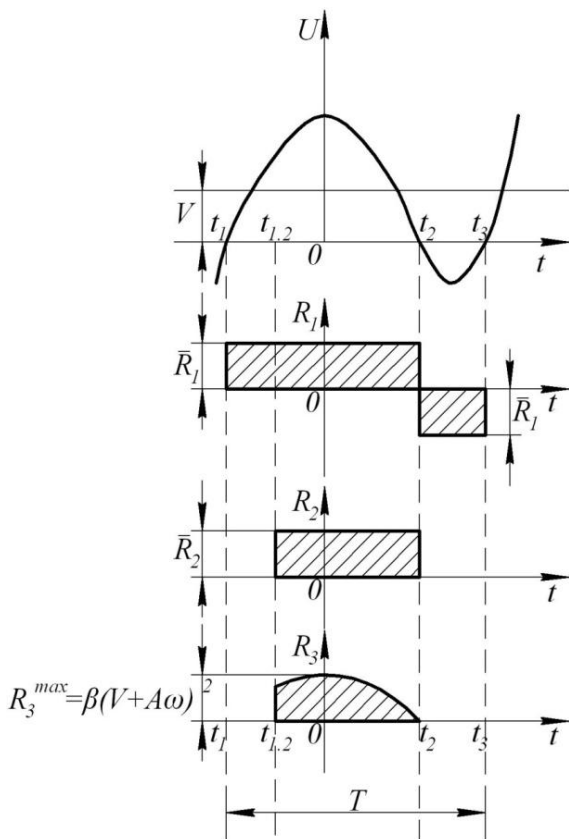


Рис. 118. Изменение составляющих сопротивления почвы R_1 , R_2 и R_3 за период колебаний T

Сила R_1 представляет собой кулонову силу сухого трения. Из рисунка 118 видно, что в промежутке времени $(t_2 - t_1)$ рабочий орган скользит относительно почвы вперед, в промежутке времени $(t_3 - t_2)$ – назад. Этот вопрос мы рассматривали подробно в разделе 2.1.3, поэтому воспользовавшись его результатами, получим:

$$\langle R_1 \rangle = \bar{R}_1 \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{V}{A\omega}. \quad (390)$$

Сопоставление этого составляющего сопротивления при вибрациях и без таковых дает результат

$$\frac{\langle R_1 \rangle}{\bar{R}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{V}{A\omega}. \quad (391)$$

Как видно, при вибрациях эта составляющая сопротивления стала зависеть от скорости V (признак вязкого трения) и может быть существенно снижена (рис. 119 а).

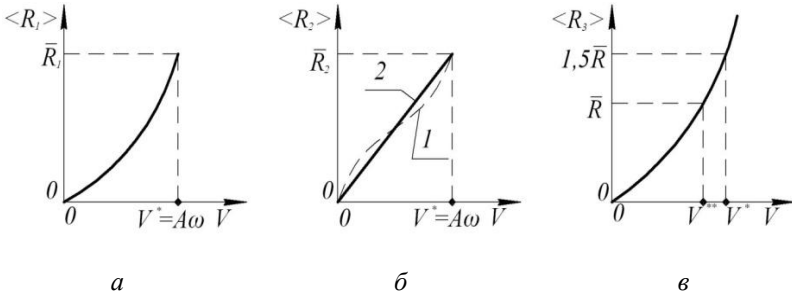


Рис. 119. Графики, иллюстрирующие снижение и линеаризацию составляющих формулы Горячкина: 1 – реальная и 2 – приближенная зависимости $\langle R_2 \rangle$ от V

В связи с инерционностью машино-тракторного агрегата тяговый механизм трактора будет «чувствовать» именно осредненную нагрузку. Это касается всех составляющих тягового сопротивления орудия, а не только \bar{R}_1 .

Среднее за период колебаний сопротивление R_2 подсчитаем следующим образом:

$$\langle R_2 \rangle = \frac{1}{T} [\bar{R}_2 (t_2 - t_{1,2})] = \frac{\omega}{2\pi} [\bar{R}_2 (t_2 - t_{1,2})]. \quad (392)$$

Неизвестный момент времени $t_{1,2}$ может быть найден из следующих соображений. Перемещения точек x_B и x_D равны (рис. 118). Следовательно, $Vt_B + A \sin \omega t_B = Vt_{1,2} + A \sin \omega t_B$.

Привлекая сюда дополнительное соотношение

$$V + A\omega \cos \omega t_B = 0,$$

можно численным способом определить $t_{1,2}$.

Анализ показывает, что $t_{1,2}$ изменяется от t_1 (при $V/(A\omega)=1$) до t_2 (при $V/(A\omega)=0$) по зависимости, близкой к линейной.

Поэтому момент времени $t_{1,2}$ может быть приближенно найден по формуле:

$$t_{1,2} = t_2 - \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{V}{A\omega}. \quad (393)$$

Соответственно, промежуток времени $t_2 - t_{1,2}$, который нам сейчас потребуется, определится из выражения:

$$t_2 - t_{1,2} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{V}{A\omega}. \quad (394)$$

Возвращаясь к (392), имеем:

$$\langle R_2 \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \bar{R}_2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{V}{A\omega} = \bar{R}_2 \frac{V}{A\omega}. \quad (395)$$

Таким образом, составляющая \bar{R}_2 также стала зависеть от скорости V , т.е. по отношению к медленной скорости V произошла линейризация этой силы (рис. 119).

Соответствующее относительное снижение второй составляющей определяется выражением

$$\frac{\langle R_2 \rangle}{\bar{R}_2} \approx \frac{V}{A\omega}. \quad (396)$$

Перейдем к подсчету среднего за период значения R_3 :

$$\langle R_3 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_{1,2}}^{t_2} \beta v^2 dt = \frac{\omega\beta}{2\pi} \int_{t_{1,2}}^{t_2} (V + A\omega \cos \omega t)^2 dt.$$

Вычисление неопределенного интеграла I данного выражения приводит к зависимости

$$I = \frac{1}{4} (4V^2 t + 2A^2 \omega^2 t + 8AV \sin \omega t + A^2 \omega \sin(2\omega t)) \Big|_{t_{1,2}}^{t_2}.$$

Соответствующая подстановка I и его пределов интегрирования дает для $\langle R_3 \rangle$ следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle R_3 \rangle = & \frac{\beta}{4} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \left\{ \frac{4\pi}{\omega} \cdot \frac{V}{A\omega} (2V^2 + A^2\omega^2) + \right. \\ & 8AV(\sin \omega t_2 - \sin \omega t_{1,2}) + \\ & \left. + A^2\omega [\sin(2\omega t_2) - \sin(2\omega t_{1,2})] \right\}. \end{aligned} \quad (397)$$

При значениях $V/(A\omega)$, равных 0 или 1, члены с тригонометрическими функциями обращаются в нуль, поэтому имеем:

$$1) \langle R_3 \rangle = 0, \text{ при } V/(A\omega) = 0;$$

$$2) \langle R_3 \rangle = \frac{\beta}{2} (2V^2 + A^2\omega^2) = \frac{3}{2} \beta V^2, \text{ при } V/(A\omega) = 1.$$

Следовательно, для этого составляющего сопротивления зависимость от скорости V остается, однако при больших значениях $V/(A\omega)$ вибрации дают увеличение сопротивления в сравнении с безвибрационными движениями рабочего органа. В частности, при $V/(A\omega)=1$ имеет место полуторное увеличение сопротивления (рис. 119в). Снижение этого сопротивления возможно лишь при некотором уменьшении скорости до значения $V^{**} < A\omega$. Соответствующее значение $V^{**}/(A\omega)$ составляет примерно 0,75.

Таким образом, можно утверждать, что при $V/(A\omega) < 0,75$ вибрации уменьшают все при составляющих формулы Горячкина. Однако общее снижение сопротивления может наблюдаться и при больших значениях $V/(A\omega)$ из промежутка $0,75 < V/(A\omega) < 1$. Дело в том, что сопротивления R_1 и R_2 в сумме общего сопротивления составляют около 70% [92]. Эти составляющие начинают снижаться при $V/(A\omega) < 1$. И если это снижение в сумме превосходит увеличение третьего слагаемого, то общий эффект снижения сопротивления будет положительным. Может быть и отрицательный эффект, когда при $V/(A\omega) > 1$ общее сопротивление за счет третьего составляющего увеличивается.

Снижение сопротивления вибрационных рабочих органов и его зависимость от скорости часто истолковывают как проявление почвой (под действием вибраций) свойств вязкой жидкости, т.е. почва становится якобы вибровязкой. Здесь мы

видим, что это явление может быть обусловлено чисто механическим эффектом вибраций, который нужно рассматривать по отношению к медленному движению со скоростью V . В отношении суммарного движения со скоростью v свойства почвы никак не изменяются. По-иному, преодоление части сопротивлений берёт на себя вибровозбудитель, соответственно, сопротивление, приходящееся на тяговый механизм трактора, уменьшается.

Общий вывод таков: с помощью вибраций рабочих органов возможно снижение сопротивления почвообрабатывающих машин, преодолеваемого тяговым механизмом трактора. Соответственно, уменьшаются и затраты энергии со стороны тягового механизма трактора. Однако не нужно забывать, что на работу вибровозбудителя также затрачивается энергия, которая передается через вал отбора мощности или гидросистему трактора.

А вот общие затраты энергии на обработку почвы по данной теории не могут быть снижены с помощью вибраций.

Возьмем, к примеру, составляющее \bar{R}_1 – силу сухого трения. При вибрациях имеют место скольжения рабочего органа относительно почвы не только вперед, как при обычной обработке, но и назад. Следовательно, путь силы трения существенно увеличивается, а это ведет к повышению энергозатрат.

Путь силы \bar{R}_2 при вибрациях рабочего органа не изменяется, поэтому энергозатраты остаются прежними.

Наконец, третья составляющая $R_3(v)$ зависит от квадрата скорости. Поскольку при вибрациях суммарная скорость v при прямом ходе увеличивается ($v > V$), то увеличиваются и затраты энергии.

Таким образом, налицо, казалось бы, парадокс: усилия уменьшаются, а затраты энергии возрастают. Но мы видели, что все это объясняется на основе простых законов механики.

Дубровский А.А. приводит на основе анализа большого количества исследований следующие экспериментальные результаты [50]:

1. Зависимость тягового усилия есть монотонно возрастающая функция от $V/(A\omega)$, при этом эффект вибрирования

с повышением скорости неизменно уменьшается и может стать даже отрицательным;

2. Снижения тягового усилия не наблюдается при $V/(A\omega) \geq 1$.

3. Работа почвообрабатывающего орудия, несмотря на снижение тяговой мощности, зачастую оказывалась энергетически невыгодной.

Как видно, все эти экспериментальные факты были объяснены с помощью изложенной теории.

Применение вибраций в современных почвообрабатывающих машинах затруднено в связи с их высокими поступательными скоростями, а это диктует необходимость поддержания высоких параметров вибраций A и ω , что технически трудно осуществить.

Хотя в целом эта идея плодотворна для тихоходных агрегатов. К примеру, при вибрационных рабочих органах мощность двигателя трактора реализуется не только через тяговый механизм, но и через вал отбора мощности или гидросистему трактора. На некоторых типах почв возможно не просто преобразование, а реальное снижение под действием вибраций их характеристик. В этом случае можно надеяться на общее снижение энергозатрат при обработке почвы.

В настоящее время серийно выпускаются у нас в стране и за рубежом вибрационные плуги для ландшафтного дизайна, различные кабеле- и трубоукладчики с прорезанием щелей вибролезвием. Скорость таких машин невелика, например, для кабелеукладчика РКР210 она составляет 1,0-1,5 км/час (0,288-0,417 м/с). Эта машина оснащена двухвальным дебалансным вибровозбудителем с гидравлическим приводом. Частота колебаний составляет 16-33 Гц (100-207 с⁻¹), максимальный размах колебаний рабочего органа достигает 25 мм ($A=0,0125$ м). Подсчитаем соотношение поступательной и вибрационной скоростей для самого неблагоприятного случая: $V=0,417$ м/с, $\omega=100$ с⁻¹, $A=0,0125$ м:

$$\frac{V}{A\omega} = \frac{0,417}{0,0125 \cdot 100} = 0,33.$$

Очевидно, что при таком показателе $V/(A\omega)$ всегда будет наблюдаться снижение сопротивления ножа в отношении тягового механизма трактора.

Не будем также забывать об автоколебательных рабочих органах почвообрабатывающих машин, о которых говорилось ранее. Без применения специальных вибровозбудителей они реализуют большие размахи колебаний, поэтому использование автоколебаний представляется в почвообрабатывающих машинах предпочтительным.

5. ДЕЙСТВИЕ ВИБРАЦИЙ НА ЖИДКИЕ И МНОГОФАЗНЫЕ СРЕДЫ

5.1. Общие замечания

Многофазные (гетерогенные) смеси представлены газозвесями, аэрозолями, суспензиями, эмульсиями, пузырьковыми средами и т.д. В отличие от *гомогенных смесей* (смесь газов, растворов и т.д.), где составляющие перемешаны на молекулярном уровне, гетерогенные характеризуются наличием макроскопических неоднородностей или включений.

В сельском хозяйстве и перерабатывающей промышленности многофазные среды представлены очень широко. Достаточно упомянуть суспензии – смеси жидкости с твердыми частицами (крахмальное молоко, фруктовое пюре и пасты, жидкие корма и т.д.), эмульсии – смеси одной жидкости с каплями другой (молоко, маргарин – полуфабрикат, топливные смеси и т.д.), *газовзвеси*, или аэровзвеси – смеси газа с жидкими каплями (кремы, кондитерские массы, мороженное в процессе сбивания и т.д.), *пузырьковые среды* – смеси жидкости с пузырьками газа или пара (газированные фруктовые и минеральные воды и т.д.).

Твердые частицы, капли, пузырьки в дисперсной смеси называют дисперсными частицами, или *дисперсной фазой*, а окружающую несущую фазу – *дисперсионной фазой*.

Интенсивное развитие ультразвуковой технологии в 60-70-х годах прошлого века привело к разработке большого количества технологических процессов, эффективно протекающих в поле колебаний: дегазация, перемешивание, интенсификация процессов массообмена (растворение, выщелачивание и т.д.), теплообмена, разделения на фракции и т.д.

Однако ультразвуковая аппаратура не получила широкого распространения в связи с высокой стоимостью ультразвуковых генераторов и малостью обрабатываемых объемов (до 10 л). Между тем в последние десятилетия было доказано, что при относительно низких частотах (порядка десятков и сотен Гц) в жидкости и многофазных средах наблюдаются явления, схожие с теми, что вызывались ультразвуком. Однако низкочастотные

колебания должны быть интенсивными, что может быть достигнуто, чаще всего, работой аппаратуры в резонансном режиме.

Теоретические и экспериментальные разработки, проведенные научными коллективами под руководством Р.Ф. Ганиева, И.И. Блехмана, С.М. Карпачевой, Г.М. Островского, И.М. Федоткина, Р.Ш. Абиева [18, 19, 62, 90, 147] и других ученых, показывают перспективность использования в технологии явлений и эффектов, наблюдаемых в жидких и многофазных средах при их низкочастотной обработке.

При вибрационной обработке жидких и многофазных сред технологические эффекты могут быть обусловлены как непосредственным воздействием на среду знакопеременных перемещений, скоростей и ускорений (т.н. вибрационными эффектами первого рода), так и через вибрационные эффекты второго рода (например, кавитацию). Последние возникают при определенных условиях виброобработки и многократно усиливают действие эффектов первого рода.

Несмотря на очевидные достижения в области технологического воздействия вибраций на многофазные среды, теоретические и практические основы этого направления находятся пока в стадии разработки и освоения.

5.2. Виброреология многофазных сред

5.2.1. Основные реологические законы

Дисперсные смеси можно моделировать в виде ньютоновских и неньютоновских жидкостей.

Для ньютоновских жидкостей реологический закон утверждает простую пропорциональность между касательными напряжениями τ и скоростями деформации сдвига $\dot{\gamma}$ (c^{-1}):

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (400)$$

где η – коэффициент динамической вязкости ($Па \cdot с$).

Соответственно, графиком ньютоновского поведения является прямая линия, выходящая из начала координат (рис. 120, прямая 1).

Следующим в порядке сложности является уравнение текучести неньютоновской вязкой жидкости, которое предложено Оствальдом:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n, \quad (401)$$

где k, n – коэффициенты, определяемые экспериментально.

Примерами таких жидкостей служат тонкие суспензии при высоких концентрациях дисперсной фазы, меласса, жидкие и полужидкие кормосмеси для свиней, навоз и т.д. Вязкость таких неньютоновских жидкостей является функцией скорости сдвига, причем при $n > 1$ в уравнении (401) эффективная вязкость убывает с ростом скорости сдвига (псевдопластичная жидкость), а при $n < 1$ вязкость возрастает (дилатантная жидкость). При $n = 1$ имеем ньютоновскую жидкость.

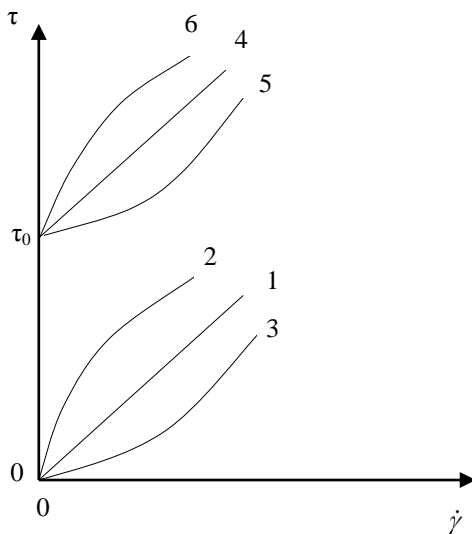


Рис. 120. Реологические кривые

сельскохозяйственных дисперсных смесей:

- 1 – ньютоновская жидкость; 2 – псевдопластичная жидкость;
- 3 – дилатантная жидкость; 4 – вязкопластичная жидкость;
- 5 – дилатантная жидкость с наличием предельного напряжения;
- 6 – пластичная жидкость

Названия «псевдопластичная жидкость» и «псевдопластичное течение» обязаны тому, что в этом случае предел текучести равен нулю (хотя это имеет место и для дилатантных жидкостей).

Некоторые продукты переработки сельскохозяйственных материалов представляют собой вязкопластичные жидкости, реологические законы которых приписывают Бингаму. Наряду с вязкими свойствами, эти жидкости проявляют и пластичные, заключающиеся в наличии предельного напряжения τ_0 сдвига, после достижения которого и возникает течение. Таким образом, такая жидкость ведет себя как твердообразная структура.

Следовательно, реологический закон вязкопластичной жидкости можно представить по Балкли-Гершелю в виде:

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n, \quad (\tau > \tau_0). \quad (402)$$

Показатель n может быть меньше, равен или больше 1. В зависимости от этого в название жидкости вносятся соответствующие поправки (рис. 120, кривые 4...6).

Вязкопластичные свойства проявляют чаще всего различные пасты, например, томатная, а также студневидные продукты.

Существует еще ряд жидкостей и пастообразных материалов, механические свойства которых зависят не только от скорости деформирования, но и продолжительности деформирования. Такие материалы именуются *тиксотропными*.

Тиксотропия проявляется, как правило, в том, что после разрушения жесткой структуры железообразных тел под действием сдвигового деформационного движения, по истечении некоторого времени покоя структурные связи полностью восстанавливаются.

Тиксотропные свойства проявляют различного рода полужидкие кормовые смеси, добавки, включающие молочные продукты, а также смеси на базе пищевых отходов, мясные фарши, конфетные массы. Процессы разрушения-восстановления структуры происходят у них не мгновенно, а протекают во времени.

5.2.2. Ньютоновское течение при вибрациях неньютоновских жидкостей

Многочисленные опыты показывают, что при вибрационном воздействии неньютоновские жидкости в той или иной

степени линейризуют свое течение, приближаясь к реологическому поведению ньютоновских жидкостей.

Об этом, в частности, свидетельствуют опыты, проведенные с томатным концентратом [77]. Этот продукт относится к неньютоновским системам, обладающим вязкопластичными свойствами и подчиняющимся уравнению Балкли-Гершеля.

Анализ кривых течения томатного концентрата (содержание сухих веществ – 25%) показывает, что без вибраций течение его наступает при τ свыше 120 Па (рис. 121, кривая 1). В условиях вибраций томатный концентрат начинает течь при τ меньше 20 Па с эффективной вязкостью η (отношение τ к $\dot{\gamma}$), соответствующей определенной степени разрушения структуры (кривые 2, 3). При увеличении τ и $\dot{\gamma}$ наблюдается аномалия вязкости, причем η уменьшается, не достигая значения, соответствующего предельно разрушенной структуре. Очевидно, η зависит от частоты ω и амплитуды A колебаний. Например, при $\omega = 210 \text{ с}^{-1}$ и $A = 1$ мм полностью исчезает предел текучести, значительно снижается η , и томатный концентрат течет как истинная ньютоновская жидкость (кривая 4) почти с постоянным уровнем вязкости $\eta \approx 2,5 \text{ Па}\cdot\text{с}$.

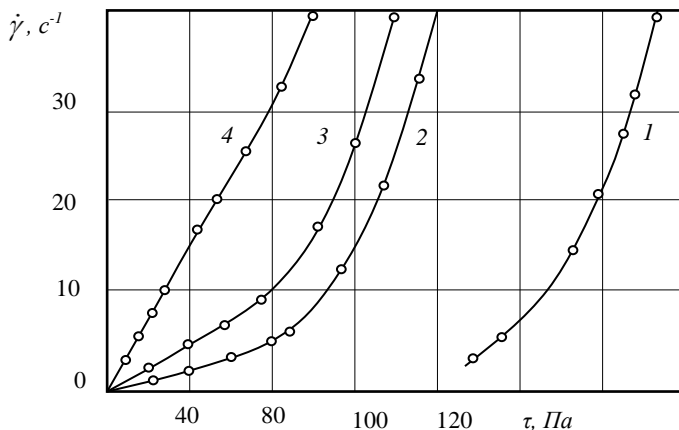


Рис. 121. Кривые течения томатного концентрата [23]:
 1 – без вибраций; 2 – $\omega = 210 \text{ с}^{-1}$, $\eta = 0,067$; 3 – $\omega = 70 \text{ с}^{-1}$, $\eta = 0,33$;
 4 – $\omega = 210 \text{ с}^{-1}$, $\eta = 0,33$; $\eta = A/H$, H – высота слоя концентрата)

Зависимость η от параметров колебаний (рис. 122) имеет одинаковый характер, следовательно, ω (кривая 1) и A (кривая 2) равноценно воздействуют на вязкость томатного концентрата. Таким образом, можно говорить об управлении реологическим параметром (вязкостью) с помощью изменения виброскорости $A\omega$.

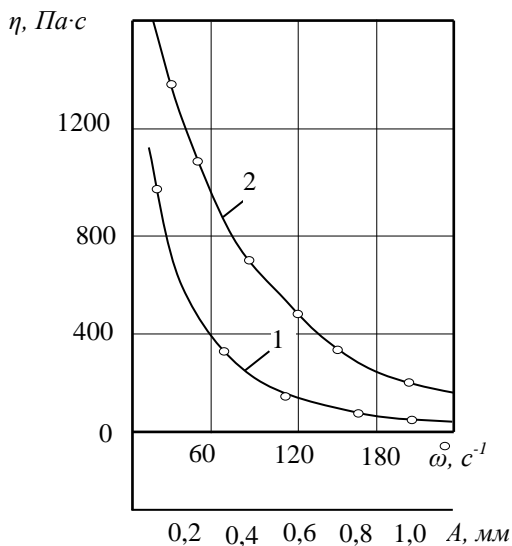


Рис. 122. Зависимость коэффициента динамической вязкости томатного концентрата от параметров колебаний:
 1 – $\eta = \eta(\omega)$; 2 – $\eta = \eta(A)$

Данные опыты показывают, что для существенного снижения вязкости томатного концентрата виброскорость должна быть не ниже 0,18 м/с.

Подобные эффекты отмечаются в тиксотропных системах, где в результате вибрационной обработки происходит повышение разжиженности (консистентности). Степень разжиженности определяется скоростью $A\omega$ вибраций и временем их воздействия. Действие вибраций на тиксотропные системы можно разбить на две фазы. В первой фазе происходит разрушение структурных связей и, как следствие, снижение вязкости. Во второй фазе, отвечающей предельно разрушенной структуре, течение

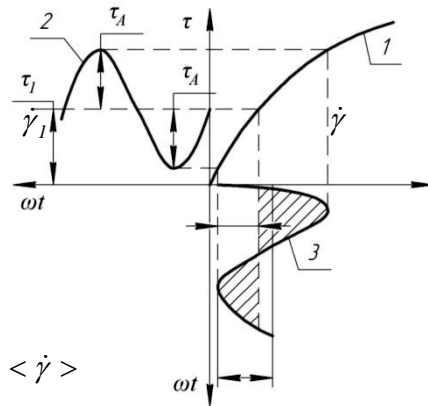
таких систем подобно ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью. При снятии на первой фазе вибрационного воздействия структура системы со временем восстанавливается.

Явление тиксотропного снижения вязкости может быть использовано для интенсификации процессов переработки сельскохозяйственных материалов. Для этого дисперсные смеси, обладающие тиксотропными свойствами, непосредственно перед определенными операциями их обработки (например, перед смешиванием с другими компонентами, дозированием или просто транспортировкой) следует подвергнуть вибрационным воздействиям. После того, как закончится процесс тиксотропного разрушения структуры, снизятся вязкость и жесткость продукта, он подается на обработку.

5.2.3. Возрастание под действием вибраций скорости течения неньютоновских жидкостей

Нелинейность зависимости между величинами τ и $\dot{\gamma}$, отражаемая уравнением (401), приводит к тому, что симметричному циклу колебаний касательного напряжения соответствует несимметричный (существенно смещенный в сторону больших $\dot{\gamma}$) цикл колебаний скорости сдвига. Иначе говоря, происходит увеличение среднеинтегральной скорости потока, если сдвиговые колебания были наложены на стационарный сдвигаемый поток. Появление этого эффекта хорошо иллюстрирует рисунок 123.

Рис. 123. Нелинейные искажения формы колебаний в неньютоновских жидкостях:
 1 – кривая течения;
 2 – график изменения касательного напряжения;
 3 – график функции $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\omega t)$



Величина эффекта возрастания среднеинтегральной скорости течения при воздействии вибраций количественно зависит от степени нелинейности кривой течения, т.е. показателя степени n в уравнении (401). Действительно, если в трубе с псевдопластичной жидкостью имелось касательное напряжение τ_1 при течении потока и к нему добавить знакопеременное напряжение с амплитудой τ_A , то закон изменения τ будет таким

$$\tau = \tau_1 + \tau_A \sin \omega t. \quad (403)$$

Очевидно, что среднее за период колебаний $T = 2\pi / \omega$ значение τ будет равно τ_1 :

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \tau(\omega t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\tau_1 + \tau_A \sin \omega t) dt = \tau_1. \quad (404)$$

Но кривая $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\omega t)$ не будет носить симметричную синусоидальную форму, а будет искажена, в силу нелинейности закона $\tau = f(\dot{\gamma})$ (рис. 123). Причем искажение будет таково, что среднее за период значение $\dot{\gamma}$ больше значения этого показателя без вибраций, т.е.

$$\langle \dot{\gamma} \rangle > \dot{\gamma}_1. \quad (405)$$

Это и означает, что скорость течения жидкости возрастает.

У ньютоновских жидкостей ($n = 1$) данный эффект не проявляется. Он имеет место только при реологической нелинейности, причем, чем больше эта нелинейность (показатель n), тем ощутимее возрастание скорости потока.

Данный эффект реализуется в полной мере в том случае, если поле периодических деформаций более или менее однородно (не проявляется затухание колебаний). Это условие легко выполняется при возбуждении в перерабатываемом объеме материала продольных, а не сдвигаемых волн. Касательные напряжения в этом случае могут появиться, например, за счет условия прилипания на стенках рабочих органов.

5.2.4. Законы колебаний твердых частиц в несущей фазе

С задачами о колебаниях твердых частиц суспензий приходится сталкиваться при анализе работы различных вибро-

устройств, в которых некоторый объем суспензии подвергается вибрациям. При этом важно определить параметры вибраций частиц относительно несущей фазы. Именно на этом анализе возможен расчет числа Рейнольдса, определяющего режим обтекания частиц и, следовательно, интенсивность процессов массо- и теплопереноса.

Данная задача решена Н.Л. Гранат [18] в предположении, что все твердые частицы смеси имеют одинаковые размеры d и плотности ρ_r , причем концентрация твердой фазы не очень велика, так что можно пренебречь взаимодействием частиц между собой. Если закон колебаний объема суспензии задан в форме $\xi = A \sin \omega t$, то выражение для относительных колебаний частиц имеет вид:

$$\xi_* = A_* \sin(\omega t + \phi), \quad (406)$$

где

$$A_* = A |\Delta - 1| \left[\Delta^2 + \Delta \left(1 + \frac{9}{2} \alpha^{-1} \right) + \frac{1}{4} + \frac{81}{16} \alpha^{-4} \left(1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \frac{4}{9} \alpha^3 \right) \right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$\phi = \arctg \left[\frac{9}{4} \frac{1 + \alpha}{\alpha^2 \left(\Delta + \frac{1}{2} + \frac{9}{4\alpha} \right)} \right]; \quad \Delta = \frac{\rho_r}{\rho_{ж}}; \quad \alpha = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}};$$

$\rho_{ж}$ – плотность несущей фазы;

ν – коэффициент кинематической вязкости.

Анализ приведенных формул показывает, что твердые частицы можно считать движущимися вместе с несущей фазой, когда размер частиц очень мал ($d \rightarrow 0$), либо при низкочастотных вибрациях ($\omega \rightarrow 0$), либо когда плотность фаз близка ($\Delta \rightarrow 1$). В иных случаях колебания этих фаз различаются между собой по амплитуде, следовательно, имеется относительное движение частиц в несущей фазе.

Кроме простейших колебательных движений известны направленные движения твердых частиц и газовых пузырьков в плоских стоячих и бегущих волнах, возбужденных в многофазной среде.

Возникновение направленных в среднем движений дисперсных фаз в жидкости при вибрациях обусловлено нелинейностью взаимодействия этих фаз. Благодаря нелинейности суммарный импульс, передаваемый дисперсному элементу среды от волнового поля, за период колебаний может оказаться отличным от нуля.

Подобные эффекты мы наблюдали ранее в отношении сыпучих смесей и псевдопластических жидкостей.

Данные эффекты изучаются волновой механикой и могут быть использованы в процессах волновой технологии. В работах академика Р.Ф. Ганиева¹ и его коллег [36, 37] это направление успешно развивается. В частности, теоретически и экспериментально доказана возможность дрейфа и последующего скопления твердых частиц и газовых пузырьков в отдельных областях вибрируемого объема многофазной среды (обычно узлы или пучности стоячей волны) (рис. 124). Это открывает новые возможности разделения многофазных сред или, наоборот, их перемешивания.

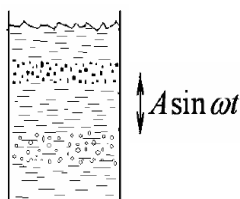


Рис. 124. Концентрация пузырьков и твердых частиц в определенных областях столба жидкости

5.3. Пространственные структуры в вибрируемых объемах жидкости

5.3.1. Рябь Фарадея

Рябь Фарадея – характерные структуры, формируемые капиллярными волнами, возбуждаемыми на поверхности жидкости в кювете, совершающей вертикальные колебания с определенной

¹ **Ганиев Ривнер Фазылович** (род. в 1937 г.) – докт. техн. наук, профессор, академик РАН, директор Института машиноведения РАН.

Является автором многочисленных работ по нелинейным колебаниям упругих систем, основателем научного направления по волновой механике и волновой технологии.

частотой и амплитудой. Схема установки для наблюдения ряби Фарадея показана на рисунке 125а. Впервые наблюдал данное явление Майкл Фарадей и его эксперименты являются одними из первых по наблюдению самоорганизации в динамических системах. Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным белком).

Как видно из рисунка 125б, в зависимости от управляющих параметров системы (амплитуды и частоты внешнего воздействия, свойств жидкости), на поверхности жидкости могут образовываться как регулярные структуры различной формы, так и беспорядочно меняющиеся во времени и пространстве волны.

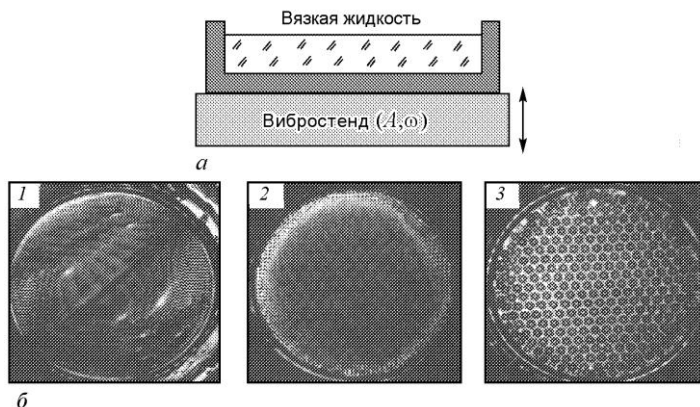


Рис. 125. Иллюстрация к описанию параметрически возбуждаемых капиллярных волн на поверхности жидкости – рябь Фарадея: а – схема, поясняющая экспериментальную установку, частота ω и амплитуда A вибрации является основными управляющими параметрами, от которых зависит форма ячеек; б – примеры ячеек Фарадея, образующихся на поверхности жидкости при различных частотах и амплитудах внешнего воздействия: 1 – длинные валики, 2 – квадратная решетка, 3 – шестиугольные («сотовые») структуры (из работы Езерского А.Б. и др. [159])

Рябь Фарадея напоминает ячейки Бенара и пространственные структуры в вибрируемой сыпучей среде. Рябь Фарадея – это вторая стадия (режим 2) развития процесса воздействия вибраций на тонкий слой вязкой жидкости. В целом мож-

но выделить три режима динамического поведения (покой, регулярные структуры, хаос), что роднит ее с системой Лоренца. Как и для сыпучей среды, основной фактор, влияющий на качественные перестройки в жидкости, это коэффициент перегрузки $r = A\omega / g$. Это доказано многочисленными экспериментами.

Приведем результаты такого анализа из работ Дж. Голуба и А. Кудролли [160, 161], полученные при изменении амплитуды и частоты внешнего воздействия для силиконового масла с кинематической вязкостью $1,0 \text{ см}^2/\text{с}$. На рисунке 126 приведена карта режимов, снятая экспериментально. Для небольшой амплитуды внешнего воздействия наблюдается *спокойная поверхность* жидкости. Линия, отмеченная кружками, – это линия порога неустойчивости. При превышении этого порога на поверхности жидкости возникает капиллярная рябь. В случае небольшой надкритичности структуры на поверхности регулярны и представляют собой либо короткие или длинные валики (рис. 126), либо квадратные ячейки или шестиугольные «сотовые» структуры. Далее, с ростом r в системе наблюдается режим перемежаемости, когда одновременно с областями регулярной динамики (правильных валиков) наблюдается области хаотизации капиллярных волн.

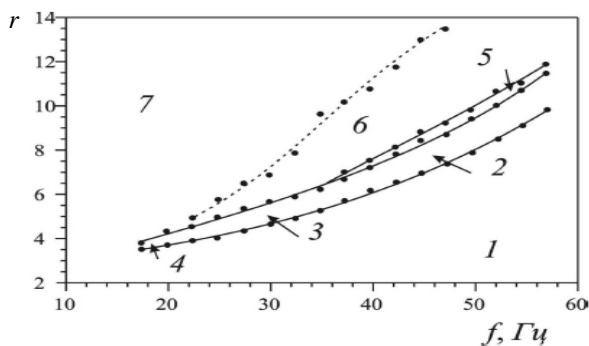


Рис. 126. Карта режимов параметрически возбуждаемых капиллярных волн: здесь цифрами обозначены области различных режимов: 1 – невозбужденная поверхность; 2 – «длинные валики»; 3 – «короткие валики»; 4 – шестиугольные структуры; 5 – модуляция амплитуды волн; 6 – перемежаемость; 7 – пространственно-временной хаос

Дальнейший рост ведет к разрушению упорядоченности в расположении ячеек, имеющиеся дефекты в решетке перемещаются по поверхности, причем с ростом r их число увеличивается и в итоге *система переходит к пространственно-временному хаосу*.

Отметим, что вышеописанная карта режимов не универсальна, и при других значениях параметров получающиеся структуры и границы областей будут отличаться от вышеописанных.

Видимо, более универсальные результаты могут быть представлены при использовании параметров

$$r = \frac{A\omega}{g}; \quad \sigma = \frac{A\omega h}{v} \quad \text{и} \quad b = \frac{h}{D},$$

введенных нами при анализе подобных структур в вибрируемой сыпучей среде.

При получении ряби Фарадея толщина слоя может быть от нескольких миллиметров (для вязкой жидкости) до нескольких сантиметров (для воды). Колебания могут быть не только вертикальными, но и круговыми или эллиптическими. Однако при этом должна быть вертикальная составляющая. Днище сосуда может быть не только плоским, но и криволинейным. Следует также отметить, что при круговых и эллиптических колебаниях в вертикальной плоскости поверхность жидкости остается горизонтальной (с бугорками ряби Фарадея), а не имеет угла наклона, как в сыпучей среде.

Очевидно, что некоторые технологические процессы могут быть проведены по этой схеме приложения вибраций, характеризующейся некоторым слоем жидкости, помещаемым в открытую емкость. Если в такой слой поместить твердые частицы, то они будут непрерывно обтекаться жидкостью с переменным вектором скорости. Сюда следует причислить медленные осредненные течения жидкости, как результат действия вибраций. Многочисленными экспериментами доказано, что наложение поля колебаний ускоряет различные массообменные процессы: выщелачивание, экстракцию, растворение и т.д.

5.3.2. Динамика многофазной среды «жидкость-газ» в закрытой емкости

Вибрация закрытой емкости, в которую жидкость налита примерно на 90% высоты, а остальной объем занимает воздух, приводит к новым качественным эффектам и явлениям.

В динамическом поведении вибрируемой в сосуде жидкости в зависимости от ее свойств и ускорения вибраций также выделяются три стадии (по Зайцеву Е.Д.): 1) относительный покой жидкости относительно емкости (рис. 127а); 2) виброаэрация жидкости (рис. 127б); 3) вибротурбулизация, сопровождающаяся хаотическим перемешиванием двухфазной среды и кавитацией (рис. 127в).

В режиме *виброаэрации* под поверхностью жидкости образуют пузырьки воздуха диаметром 1-2 мм. Пузырьки сдавлены в направлении сверху вниз и имеют форму чечевицы. Пузырьки газа вследствие интенсивного перемешивания жидкости перемещаются в пульсационном режиме. Амплитуда пульсационного движения 1-3 мм. Период пульсации на порядок меньше, чем период вибраций, а скорость *пульсационного движения* достигает *десятька метров в секунду*. Пузырек воздуха многократно кавитирует в течение одного периода колебаний.

При ускорениях вибраций больше 10 м/с^2 растворенные в жидкости пузырьки газа собираются в узлах *стоячей волны в виде роя*. Первый *узел* стоячей волны образуется на дне, поэтому часть пузырьков воздуха погружается на дно, где образуется воздушная прослойка (каверна).

При определенных параметрах вибраций и определенных высотах столба жидкости и воздуха в *закрытом сосуде* весь объем воздуха *распределяется в жидкости*, которая начинает интенсивно перемешиваться и циркулировать вместе с мелкими (от 0,02 до 2 мм) пузырьками газа между узлами (скопления воздуха), а кавитация охватывает весь объем жидкости. В этом состоянии, называемом *вибротурбулизацией*, образуется более или менее однородная газожидкостная смесь, заполняющая весь объем емкости и напоминающую кипящую жидкость (рис. 127 в).

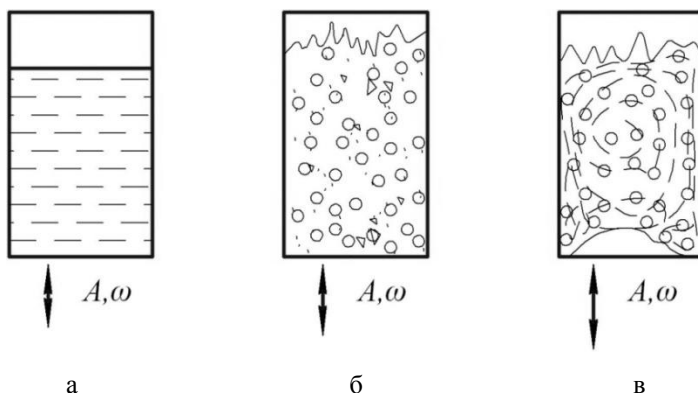


Рис. 127. Три основных режима динамического поведения газожидкостной системы:
а – относительный покой; б – режим аэрации; в – режим вибротурбулизации с образованием воздушной каверны

Наличие подушек воздуха вверху и внизу жидкости создает колебательную систему «жидкость-газ», в которой роль упругого элемента играет газ, локализованный в подушках инерционного объема жидкости. При этом возможен автоколебательный, резонансный режим колебаний, при котором амплитуда колебаний объема жидкости значительно превосходит амплитуду колебаний емкости, задаваемую извне. Если учесть, что в обеих подушках давление воздуха значительно осциллирует (как и в самой жидкости), то можно указать на следующие последствия этого. Во-первых, имеются постоянные перемещения воздушных пузырьков из верхней подушки и нижнюю, и наоборот. Во-вторых, возникают кавитационные явления в виде роста воздушных пузырьков и их схлопывания.

Все это и приводит к образованию газожидкостной смеси в вибрирующей емкости.

При этом параметры процесса вибротурбулизации вполне осуществимы в производственных условиях. Например, интенсивная вибротурбулизация осуществляется при высоте столба жидкости 400-900 мм, слое воздуха 20-100 мм, диаметре сосуда 40 мм, частоте 32 Гц и амплитуде 3-4 мм (Зайцев Е.Д.). Обнаружено существенное увеличение теплообмена в этих условиях,

а также повышение температуры воды на 25°C за 0,5 ч вибрирования.

Опыты показывают, что вибротурбулизация может быть применена в технологии при мойке сырья, перемешивании и других операциях.

5.4. Виброкавитация и способы ее осуществления

Как известно, под кавитацией понимают процесс образования и исчезновения полостей внутри жидкости в акустических полях и гидродинамических потоках.

Сжимаемость жидкостей ничтожно мала, однако при растягивающих условиях их сплошность легко нарушается. Теоретическая прочность жидкостей на разрыв составляет около $0,15 \text{ ГПа}$. Однако фактически разрыв сплошности жидкости наблюдается при отрицательных давлениях, лишь немного меньших давления насыщенного пара при данной температуре – около $0,1 \text{ МПа}$. Это критическое давление носит название *порога кавитации*.

Его низкое значение по сравнению с теоретическим объясняется наличием в жидкости мельчайших газовых пузырьков – зародышей кавитации. При отрицательных давлениях эти пузырьки растут, при этом внутри они заполняются газом и паром.

Кавитационные пузырьки, как правило, быстро схлопываются при повышении давления. При схлопывании пузырьков жидкость устремляется с большой скоростью внутри пузырьков, возникает микроудар, в результате которого развиваются громадные давления, в сотни раз превышающие атмосферное. Эти хлопки порождают в жидкости ударные волны, которые затухают вблизи схлопнувшегося пузырька. Поскольку пузырьков много, то ударные волны занимают всю область кавитации. Именно за счет высоких давлений кавитация разрушает твердые тела, перемешивает несмешивающиеся в обычных условиях жидкости (т.е. возможно получение суспензий и эмульсий) и приводит к ряду других полезных эффектов.

Таким образом, чтобы вызвать в жидкости кавитацию, достаточно подвергнуть ее знакопеременным давлениям, причем отрицательное давление должно быть по модулю близкое к атмосферному.

Такие условия имеются в мощных звуковых полях, поскольку распространяющиеся звуковые волны представляют собой чередование импульсов сжатия и растяжения. В небольших объемах жидкости, когда волновой характер распространения давлений не проявляется, также возможно получение виброкавитации, как это имеет место при вибротурбулизации. Наконец, виброкавитация может быть вызвана в простейшем устройстве: поршень-цилиндр (рис. 128). С целью уплотнения поршень должен быть погружен полностью в жидкость.

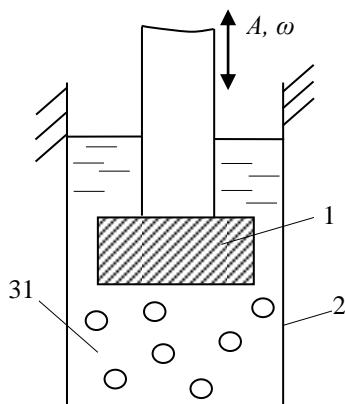


Рис. 128. Получение кавитации при помощи вибрирующего поршня:
1 – поршень; 2 – цилиндр; 3 – зона кавитации

Схлопывание пузырьков, находящихся на поверхности твердых тел, имеет свои особенности. Дело в том, что в этом случае процесс схлопывания является несимметричным (рис. 129).

Жидкость устремляется внутрь пузырька лишь с одной стороны, в результате чего развивается кумулятивная струя, вызывающая эрозию на поверхности твердого тела. Это явление положено в основу получения суспензий, отмыва различных поверхностей от различного рода загрязнений.

Для технологического применения следует отдавать предпочтение схеме получения кавитации при вибротурбулизации, поскольку там газожидкостная система работает в режиме резонансных автоколебаний, причем амплитуда колебаний жидкости

много больше амплитуды, развиваемой приводом. Схема работы с поршнем требует мощных вибровозбудителей. Однако при возможности плавного изменения частоты привода (например, с помощью цифровых преобразователей частоты) возможна настройка на резонанс и поршневых устройств (активаторов кавитации). Однако такие активаторы имеют большие зазоры со стенками камеры.



Рис. 129. Стадии роста и схлопывания кавитационного пузырька на поверхности твердого тела: а) кавитационный зародыш; б) рост кавитационного пузырька;

в) схлопывание пузырька с образованием кумулятивной струи; г) образование на месте кавитационного пузырька нескольких мелких пузырьков – новых зародышей кавитации

Для демонстрации последнего предложения рассмотрим установку для мойки деталей, разработанную в Самарском ГТУ [45]. Установка работает в низкочастотном диапазоне 100-200 Гц (рис. 130).

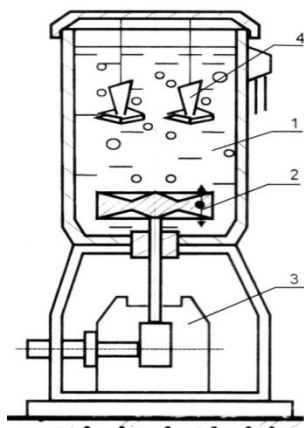


Рис. 130. Схема кавитационной установки для мытья деталей

Очищаемые детали 4 размещают в рабочей зоне ванны 1, включают привод 3, который сообщает активатору 2 линейные перемещения на частоте эффективного резонанса, и производят промывку. Настройку на резонанс осуществляют путем плавного изменения частоты вращения привода, связанного с частотным мультипликатором, обеспечивающим получение мощного кавитационного факела в рабочей зоне ванны. В установке, показанной на рисунке 131, при размерах камеры диаметр – 300 мм, высота – 1100 мм, освоена промывка наиболее ответственных деталей газотурбинных авиадвигателей в Самарском научно-техническом комплексе имени акад. Н.Д. Кузнецова: подшипников роторов, топливной, гидравлической аппаратуры и др.

В этой установке, наряду с кавитацией создаются мощные кумулятивно направленные струи макроскопических размеров. В то же время кавитационные пузырьки имеют микроскопический масштаб при взаимодействии с твердыми телами и поверхностями раздела.

В пищевой и фармацевтической промышленности большую группу оборудования составляют т.н. пульсационные аппараты, создающие с помощью мембран или небольших поршней воздействия на обрабатываемый материал с целью интенсификации массо- и теплопереноса. Однако такое воздействие не является интенсивным, при этом кавитация не возбуждается. Одним из направлений устранения данного недостатка является вакуумирование емкости, в которой проводится технологический процесс. Рассмотрим это на процессе экстракции в режиме вакуумного осциллирующего кипения экстрагента. Недостаток способа экстрагирования в режиме чисто вакуумного кипения (большие энергозатраты) может быть в значительной мере устранен путем проведения процесса в адиабатическом режиме так, чтобы теплота, затраченная на испарение жидкости, возвращалась в перерабатываемую суспензию. Для осуществления такого процесса Ивановым Е.В. была разработана установка, приведенная на рисунке 131.

В аппарат заливают экстрагент, нагревают его до заданной температуры, загружают сырье и герметизируют колонну экстрактора 1. В верхнем положении мембраны через вентиль 5 систему вакуумируют вплоть до достижения в аппарате разрежения, при котором в жидкости начинают появляться первые паровые пузырьки.

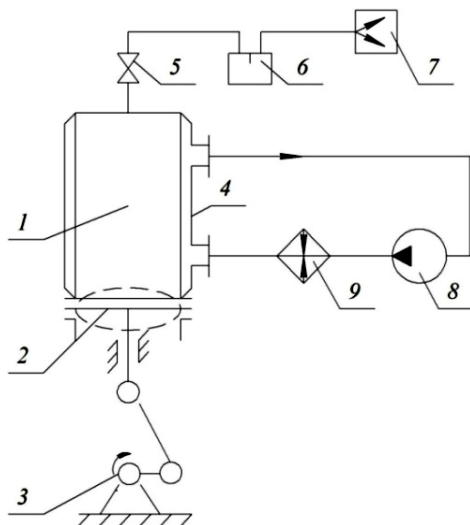


Рис. 131. Схема экстракционной установки вакуумного осциллирующего кипения экстрагента:

- 1 – колонна экстрактора; 2 – мембранный узел;
 3 – привод с кривошипно-шатунным механизмом; 4 – рубашка;
 5 – игольчатый вентиль; 6 – брызгоуловитель; 7 – вакуум-насос;
 8 – насос; 9 – термостат

После этого вентиль 5 закрывают и включают электропривод 3. При движении мембраны вниз, объем паровой полости над экстрагентом начинает увеличиваться, давление в аппарате понижается, а в жидкости образуются и растут паровые пузырьки. При движении мембраны вверх уменьшается объем системы, давление в аппарате повышается и начинаются схлопывание и конденсация пара.

Рост частоты вскипания приблизительно одинаково влияет на экстрагирование из «кускового» и «листового» материала, что связано с увеличением числа паровых пузырьков, ростом интенсивности их гидродинамического воздействия на частицы и суммарного количества воздействия на сырье. При увеличении частоты с 1 до $7,5 \text{ с}^{-1}$, уровень выхода экстрактивных веществ увеличивается с 60 до 80% для плодов боярышника и с 78 до 93% для травы зверобоя.

5.5. Некоторые другие эффекты вибраций

5.5.1. Виброструйный эффект

Виброструйным эффектом называется вибрационное возбуждение множества затопленных струй в объеме жидкости, помещенной в камере аппарата. Такое воздействие может также существенно ускорять процессы, протекающие в жидкой несущей среде на граничных поверхностях различных фаз, т.е. в смесях типа суспензий, эмульсий и потоков пузырьков газа в жидкости.

Рассмотрим аппарат подобного рода для извлечения пектина из растительного сырья. Конструкция разработана в Курском ГТУ (С.Ф. Яцун и др.) и позволяет сократить время процесса до 25-30 мин., степень экстракции повысить до 90%.

Экстрактор (рис. 132) состоит из: 1 – электромагнитного электропривода; 2 – экстракционной камеры; 3 – штока; 4 – перфорированных дисков; 5 – датчика ускорения; 6 – системы автоматического управления.

Процесс экстракции ускоряется за счет возвратно-поступательного движения рабочего органа с дисками, перфорированными отверстиями. При этом в смеси возникает явление, называемое виброструйным эффектом, вызывающее появление в объеме жидкости множества затопленных турбулентных струй, создающих интенсивное перемешивание жидкости, что существенно интенсифицирует процесс экстракции.

В качестве вибропривода используется электромагнитный привод с Ш-образным сердечником и качающимся якорем. Питание и управление виброприводом происходит с помощью системы автоматического управления, которая позволяет контролировать интенсивность вибрационного воздействия вне зависимости от технологической нагрузки на рабочий орган, что в свою очередь дает возможность повысить эффективность процесса экстракции.

Были выполнены исследования влияния режимов вибрационного воздействия на степень экстракции, которые показали, что наиболее эффективным является процесс извлечения пектиновых веществ с применением полигармонического воздействия: на 10-15% выше, чем при моно- и бигармоническом воздействии.

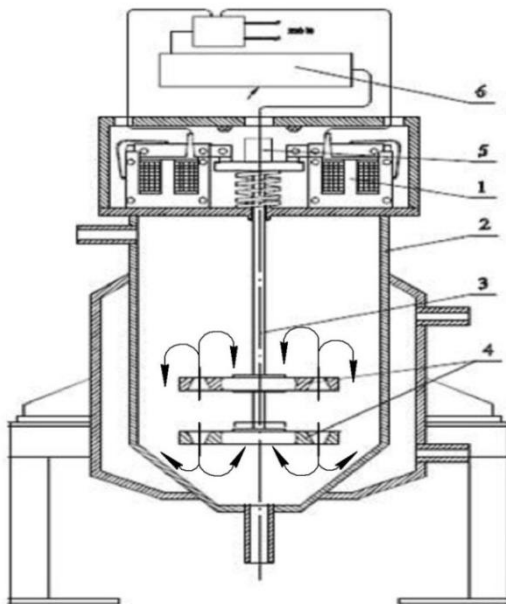


Рис. 132. Конструкция экстрактора

Это объясняется тем, что в спектре ускорений рабочего органа при полигармоническом воздействии кроме основной гармоники (50 Гц) присутствуют гармоники как низших (5 и 20 Гц), так и высших (90 и 100 Гц) порядков.

5.5.2. Вибрационная инжекция газа в жидкость

Другое явление – вибрационная инжекция газа в жидкость – было обнаружено недавно в ОАО «Механобр Техника». Воздух или другой газ засасывается в вибрирующий в этом газе сосуд с жидкостью через отверстия в его нижней части (рис. 133). Впрочем, инжекция будет происходить и в случае вибрации сосуда, помещенного в жидкость, т.е. можно говорить также об вибрационной инжекции жидкости в жидкость. В этом варианте оно родственно виброструйному эффекту с той разницей, что отверстие в сосуде не обязательно должно быть коническим, а жидкости в сосуде и вне его могут быть разными.

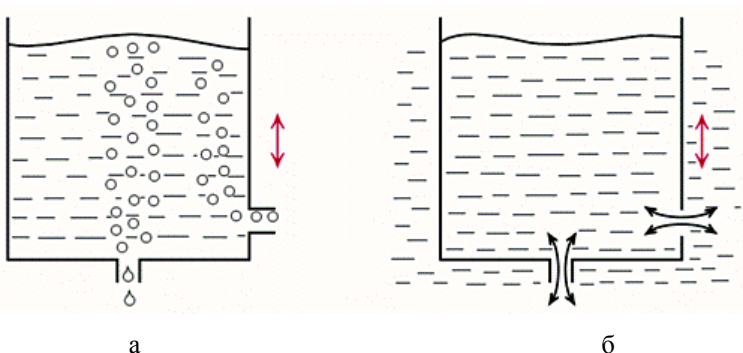


Рис. 133. Вибрационная инжекция: *а – газа в жидкость;*
б – жидкости в жидкость

В настоящее время в ОАО «Механобр-Техника» ведутся исследования по использованию этого явления в процессах мокрого просеивания и грохочения, поскольку подсос воздуха через отверстия сита очищает их и интенсифицирует процесс. Кроме того, просматривается перспектива использования данного явления в процессах флотации.

5.5.3. Вибрационное заполнение жидкостью глухих полостей

Большая группа технологических процессов переработки сельскохозяйственного сырья основана на явлениях экстракции и диффузии, обусловленных извлечением или переносом некоторых компонентов исходного сырья с помощью жидких растворителей. Многочисленными экспериментальными исследованиями установлено интенсифицирующее действие вибраций на эти процессы. К примеру, при экстракции вибрационное воздействие сокращает время технологических процессов и увеличивает полноту извлечения компонентов. Однако знания о механизме действия вибраций в этих процессах до сих пор неполны.

Приблизиться к ответу на эти вопросы позволяет описываемый ниже эффект вибраций, установленный в Алтайском ГАУ.

Эффект вибрационного заполнения жидкостью глухих полостей, заключается в том, что при вертикальной вибрации тела, погруженного в жидкость и содержащего глухие полости, от-

крытые снизу, возникает заполнение этих полостей жидкостью, причем уровень заполнения зависит от времени и параметров вибрирования.

Это чисто динамическое явление, поскольку при статическом погружении тела в жидкость полости жидкостью не заполняются.

Эффект может быть продемонстрирован следующим образом (рис. 134).

Если опрокинутый стакан медленно погружать в жидкость (рис. 134а), то внутренняя полость жидкостью не заполняется, поскольку воздух из полости не вытесняется.

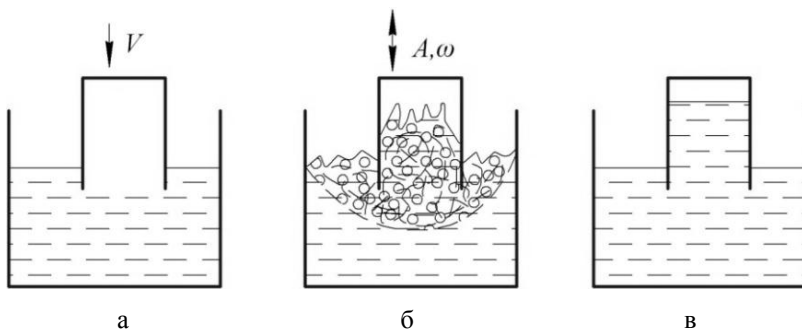


Рис. 134. Уровень и поведение жидкости в емкости: а – до вибраций; б – во время вибраций; в – по окончании приложения вибраций

Однако если стакан подвергнуть вибрациям (можно даже вручную), то внутри стакана образуется газожидкостная среда (смесь жидкости и пузырьков воздуха), которая распространяется за пределы внутренней полости стакана. Граница этой среды на рисунке 134б обозначена пунктиром. Оказавшись вне пределов внутренней полости стакана, пузырьки воздуха устремляются вверх и удаляются в атмосферу. Таким образом, газожидкостный слой внутри полости, образуемый при вибрациях, работает как насос, откачивающий воздух из полости. Жидкость, окружающая стакан снаружи, работает как клапан, пропускающий пузырьки воздуха в одном направлении.

После окончания вибрирования (рис. 134в) оказывается, что жидкость заполняет почти весь объем полости.

Парадоксальным является то, что явление наблюдается при очень низкой частоте вибрации 4-5 Гц. Процесс длится 15-20 с.

Подчеркнем, что это не капиллярный эффект и не ультразвуковой капиллярный эффект, поскольку силы поверхностного натяжения жидкости здесь не играют никакой роли. Диаметр или размер полости может составлять несколько сантиметров, а не миллиметров, как это имеет место при наблюдении капиллярного эффекта.

Явление может быть использовано для ускоренной пропитки различных материалов. Для этого они должны быть помещены в контейнер и подвергнуты вертикальной вибрации.

5.6. Вибрационные насосы

5.6.1. Общие сведения

Вибрационными насосами называются устройства, в которых жидкая среда перемещается в процессе возвратно-наступательного движения. В среднем же осуществляется направленное транспортирование перекачиваемой среды. С помощью вибрационных насосов можно перекачивать не только жидкости, но и многофазные системы.

У нас в стране выпускается в год до 700 тысяч вибрационных насосов различной модификации.

Создание вибрационных насосов в нашей стране восходит к Г.М. Шухову, М.Е. Брейтеру, К.А. Елисееву, В.М. Усаковскому¹. Первый насос этого типа выпущен в 1971 году под названием «Ручеек». Он имел электромагнитный привод и рабочие органы вибрационного типа. Хотя подача этого насоса невелика ($Q = 400-1500$ л/час), но высокая надежность, отсутствие враща-

¹ **Усаковский Владимир Моисеевич** – докт. техн. наук, профессор, научный сотрудник Всесоюзного НИИ электрификации сельского хозяйства (ВИЭСХ). Специалист в области сельскохозяйственного водоснабжения. За разработку вибрационных насосов удостоен в составе коллектива премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники за 1999 год.

ющихся частей, малая цена – способствовали широкому распространению этих насосов в быту, а ныне и фермерских хозяйствах.

Эти насосы, разработанные во Всесоюзном НИИ электрификации сельского хозяйства (ВИЭСХ), были названы объемно-инерционными [116].

Насосы, работающие на принципе возбуждения бегущей волны в шланге, являются *перистальтическими* (поскольку такой же принцип работы у кишечника млекопитающих). В случае возбуждения стоячей волны в участке шланга устройства называются *насосами объемного вытеснения*.

5.6.2. Принцип действия вибрационных насосов

Вибрационные насосы объемно-инерционного действия снабжены, чаще всего, электромагнитным приводом. Они просты по конструкции, надежны в эксплуатации; предназначены для транспортирования воды и других жидкостей, в том числе агрессивных и с механическими включениями. В агрегатах объединены объемный и инерционный принципы, что позволяет при повышенном коэффициенте наполнения выполнять рабочие органы из эластичных материалов. Характеристики насоса зависят не только от амплитуды и частоты колебаний, но и от марки резины, формы рабочего органа, его диаметра, величины установочного зазора между рабочим органом и седлом.

Электромагнитный вибровозбудитель (рис. 135) состоит из П-образного электромагнита 6 с двумя катушками и якоря 5, соединенного штоком 1 с резинометаллическим элементом 4. Разделительная диафрагма 3 отделяет привод от жидкости. Рабочий орган 2 – упругий поршень с корпусом 9 – образует камеру 11, в которой располагается обратный клапан 12. Вода из камеры вытесняется поршнем в кольцевое пространство 10 и по патрубку 7 шлангом подается потребителю. Питание электромагнита осуществляется от однофазной электрической сети кабелем 8. Рабочий орган совершает колебания в противофазе обратному клапану с частотой, равной частоте сети. Благодаря конструкции упругого резинометаллического элемента обеспечивается изменение коэффициента жесткости при различных напорах, что способствует работе в режимах, близких к резонансным.

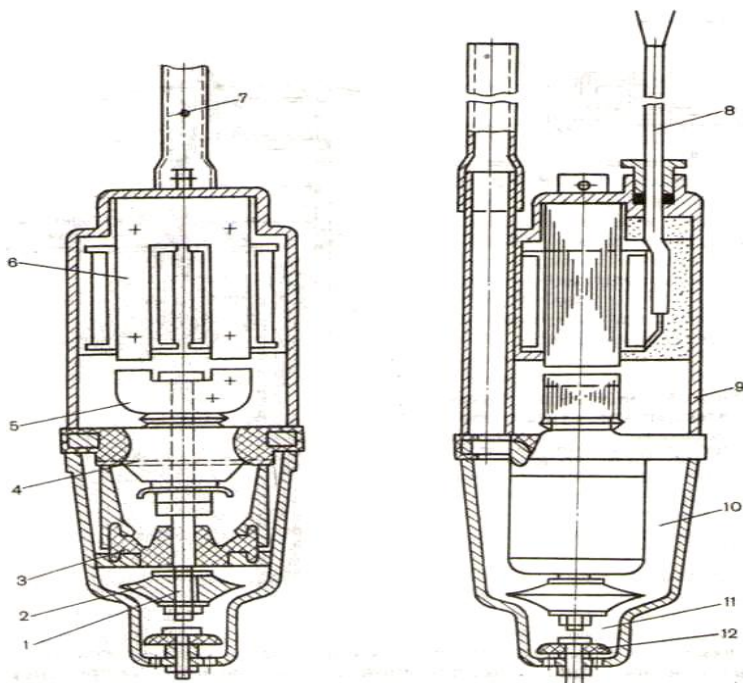


Рис. 135. Вибрационный насос: 1 – шток; 2 – рабочий орган; 3 – диафрагма; 4 – резинометаллический элемент; 5 – якорь; 6 – электромагнит; 7 – напорный патрубок; 8 – кабель; 9 – корпус; 10, 11 – нагревательная и всасывающая камеры; 12 – обратный клапан

В водоподъемнике, погруженном в источник, вода через обратный клапан поступает в корпус. При включении электромагнита в сеть рабочий орган (поршень) колеблется с частотой 6000 колебаний в минуту. Во время движения поршня обратный клапан закрывается, и вода через зазор между поршнем и корпусом выжимается, в надпоршневое пространство. При движении вверх эластичный поршень по окружности прижимается к корпусу. Под клапаном происходит понижение давления, он открывается и вода из источника поступает в насос. Одновременно средняя часть поршня сообщает жидкости, находящейся под поршнем, импульс движения. Таким образом, осуществляется подача воды. Вода, поступая в межкорпусное пространство,

охлаждает электромагнитный привод и по гибкому шлангу подается потребителю.

С увеличением напора давление в камере нагнетания возрастает и диафрагма, прогибаясь, увеличивает предварительное напряжение упругого элемента, уменьшает зазор в электромагнитной системе и выполняет роль дополнительного рабочего органа устройства.

Особенности объемно-инерционного насоса с электромагнитным приводом: отсутствие повышенных пусковых токов и простота в эксплуатации, что позволяет обеспечить их оптимальное агрегатирование с бензо-, гелио-, ветроагрегатами соизмеримой мощности.

Перистальтические насосы представляют собой устройства для направленного (волнового) продавливания жидкостей через эластичные трубки. В процессе их работы перекачиваемые жидкости контактируют только в внутренними поверхностями чистых и химически неактивных трубок-шлангов. Это исключает взаимное негативное влияние жидкостей (зачастую очень агрессивных) и поверхностей механизмов насосов.

Изготовленная из специального эластомера трубка устанавливается внутри корпуса перистальтического (шлангового) насоса (существуют различные схемы подобных конструкций). Сдавливающее перпендикулярное и продольное векторное воздействие на трубку, приводящее в движение находящуюся внутри ее жидкость, осуществляется с помощью двух или трех роликов, закрепленных с разных сторон вращающегося ротора.

В процессе динамического воздействия роликов на трубку зоны ее сплющивания плавно движутся от стороны входа жидкости к стороне входа. В результате этого с одной стороны трубки жидкость выталкивается, а с другой – наоборот, затягивается (вследствие *восстановления формы трубки и создания тем самым отрицательного давления*) (рис. 136).

К достоинствам перистальтических насосов следует отнести: конструкционная простота и абсолютная герметичность канала перемещения; отсутствует контакт движущихся механизмов с перекачиваемой жидкостью; не опасна работа всухую; возможность перекачивания очень вязких жидкостей; устройство способно выполнять функцию дозирования.

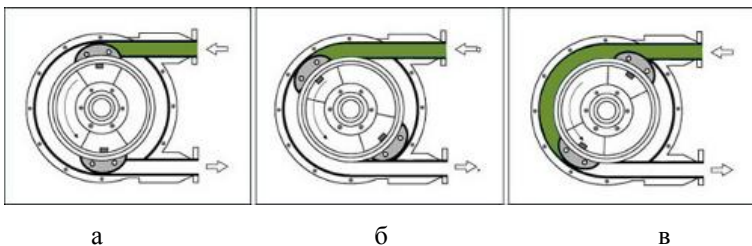


Рис. 136. Принцип действия перистальтического насоса:
а – вытягивание жидких субстанций происходит благодаря свойству трубки восстанавливать свою исходную форму после перенесенного сжатия; *б* – продвижение субстанций происходит под действием направленно движущихся зон сплющивания трубки;
в – с каждым циклом прокатывания ролика по трубке все новые порции жидкости выталкиваются в трубопровод

Несколько другой принцип у насосов *объемного вытеснения*. Немецкая фирма Feluwas с 70-х годов прошлого века выпускает шланго-мембранно-поршневые насосы (рис. 137а), а в России были запатентованы диафрагменные насосы замещения (рис. 137б) с диафрагмой в виде шланга. В первом случае давление на шланг осуществляется поршнем через промежуточную жидкость, а во втором – замещающей жидкостью от маслостанции или воздухом от компрессора.

В последнем случае объем вытесняющей жидкости в отличие от поршня неограничен, что делает возможным полное сжатие диафрагмы-шланга, обеспечивая перекачивание газосодержащих жидкостей.

Диафрагмы-шланги в таких насосах в процессе работы подвержены объемному гидравлическому нагружению, практически без перепада давлений по всей его длине, при этом изменяется только форма шланга, увеличивая или уменьшая его внутренний объем. Шланг в этом случае не подвержен каким-нибудь значительным нагрузкам, а силы трения твердых абразивных частиц о стенки шланга вне зависимости от давления, создаваемого насосом, малы, что обеспечивает очень высокую его износостойкость и долговечность. В нормальных условиях эксплуатации ресурс работы шланга составляет более 8000 тыс. ч.

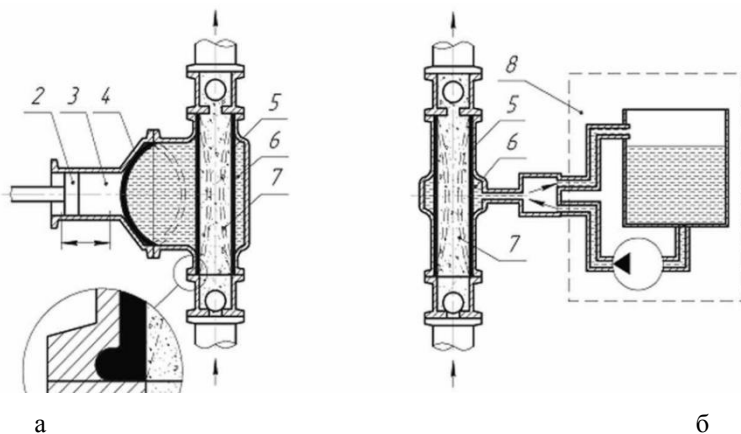


Рис. 137. Принципиальные схемы насосов объемного вытеснения:
а – шланго-мембранно-поршневой насос;
б – диафрагменный насос замещения; 1 – ползун, 2 – поршень,
 3 – гидравлическая жидкость, 4 – мембрана, 5 – шланг,
 6 – промежуточная жидкость, 7 – перекачиваемый продукт,
 8 – гидростанция

Особенность объемной нагрузки насоса позволяет применять такие насосы и для больших давлений (на данное время испытывались насосы с давлением до 250 атмосфер).

Библиографический список

1. Аипов, Р.С. Математическая модель колебательно-вращательного электропривода измельчителя листостебельных кормов на основе скользящего комбинированного резания [Текст] / Р.С. Аипов, Я.Д. Осипов, В.В. Эбингер, Ю.Ж. Байрамулов // Вестник Башкирского государственного аграрного университета. – 2011. – № 4. – С. 46-51.
2. Алифов, А.А. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии [Текст] / А.А. Алифов, К.В. Фролов. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
3. Андронов, А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1981. – 915 с.
4. Андронов, В.В. Сухое трение в задачах механики [Текст] / В.В. Андронов, В.Ф. Журавлёв. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 184 с.
5. Анохин, В.Д. Вибрационные сепараторы [Текст] / В.Д. Анохин, Д.А. Плисс, В.Н. Монахов. – М.: Недра, 1991. – 156 с.
6. Антипов, В.И. Использование комбинационного параметрического резонанса для усовершенствования вибрационных машин [Текст] / В.И. Антипов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – № 4. – С. 16-21.
7. Антипов, В.И. О принципах создания энергосберегающих вибрационных машин [Текст] / В.И. Антипов, В.К. Асташёв // Вестник научно-технического развития. – 2008. – № 1(5). – С. 9.
8. Артоболевский, И.И. О машинах вибрационного действия [Текст] / И.И. Артоболевский, А.П. Бессонов, А.В. Шляхтин. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 47 с.
9. Бабицкий, В.И. Теория виброударных систем [Текст] / В.И. Бабицкий. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
10. Бабицкий, В.И. Колебания в сильно нелинейных системах [Текст] / В.И. Бабицкий, В.Л. Крупенин. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
11. Бабичев, А.П. Основы вибрационной технологии [Текст] / А.П. Бабичев, И.А. Бабичев. – Ростов н/Д, 1999. – 621 с.

12. Бауман, В.А. Вибрационные машины и процессы в строительстве [Текст] / В.А. Бауман, И.И. Быховский. – М.: Высшая школа, 1977. – 255 с.

13. Беспамятнова, Н.М. Вибровысев сельскохозяйственных культур и удобрений [Текст] / Н.М. Беспамятнова, Ю.А. Беспамятнов, В.В. Реутин, Ю.А. Семенихина. – зерноград, 2015. – 234 с.

14. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний [Текст] / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

15. Блехман, И.И. Вибрационное перемещение [Текст] / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 412 с.

16. Блехман, И.И. Синхронизация динамических систем [Текст] / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1971. – 894 с.

17. Блехман, И.И. Синхронизация в природе и технике [Текст] / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1981. – 351 с.

18. Блехман, И.И. Вибрационная механика [Текст] / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.

19. Блехман, И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника [Текст] / И.И. Блехман. – СПб.: Руда и металлы, 2013. – 640 с.

20. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

21. Борохович, Д. Опыт применения технологии Kroosh для просеивания нерудных сыпучих материалов [Текст] / Д. Борохович, И. Круш, Ю. Ободан // Всеукраинский научно-технический журнал. – 2007. – № 3(48).

22. Буренков, Н.А. Интенсификация технологических процессов в пищевой промышленности при помощи низкочастотных колебаний [Текст] / Н.А. Буренков. – Киев: Техника, 1969. – 193 с.

23. Быховский, И.И. Основы теории вибрационной техники [Текст] / И.И. Быховский. – М.: Машиностроение, 1969. – 363 с.

24. Вайсберг, Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов [Текст] / Л.А. Вайсберг. – М.: Недра, 1986. – 144 с.

25. Вайсберг, Л.А., Вибрационное грохочение сыпучих материалов. [Текст] / Л.А. Вайсберг, Д.Г. Рубисов. – СПб.: Механобр, 1994. – 45 с.

26. Варламов, Г.П. Машины для уборки фруктов [Текст] / Г.П. Варламов. – М.: Машиностроение, 1978. – 216 с.
27. Василенко, П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин [Текст] / П.М. Василенко. – Киев: УСХА, 1960. – 283 с.
28. Василенко, П.М. Некоторые вопросы теории вибрационных процессов [Текст] / П.М. Василенко // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1962. – № 3. – С. 17-21.
29. Варсанюфьев, В.Д. Вибрационная техника в химической промышленности [Текст] / В.Д. Варсанюфьев, Э.Э. Кольман. – М.: Химия, 1985. – 240 с.
30. Верняев, О.В. Активные рабочие органы культиваторов [Текст] / О.В. Верняев. – М.: Машиностроение, 1983. – 79 с.
31. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. – 1979. – 351 с.
32. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4. Вибрационные машины и процессы / под ред. Э.Э. Лавендела. – 1981. – 509 с.
33. Вибропневмосепараторы и их использование в линиях очистки семян: уч. пособие для вузов [Текст] / В.Д. Галкин и др.; под общ. ред. В.Д. Галкина. – Пермь: ИПЦ «ПрокростЪ», 2014. – 102 с.
34. Вишняков, А.А. Комбинированный вибрационный высевающий аппарат зерновой сеялки [Текст] / А.А. Вишняков, А.С. Вишняков, В.А. Козлов // Тракторы и сельхозмашины. – 2009. – № 11. – С. 3-5.
35. Вульфсон, И.И. Некоторые заметки об опыте изложения курса теории колебаний применительно к задачам динамики машин [Текст] / И.И. Вульфсон // Теория механизмов и машин. – 2005. – № 1. – Т. 3. – С. 44-53.
36. Ганиев, Р.Ф. Динамика частиц при воздействии вибрации [Текст] / Р.Ф. Ганиев, Л.Е. Украинский. – Киев: Наукова думка, 1975. – 168 с.

37. Ганиев, Р.Ф. Волновые машины и технологии [Текст] / Р.Ф. Ганиев. – М.: НИЦ «РХД», 2008. – 192 с.
38. Гершуни, Г.З. Устойчивость конвективных течений [Текст] / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
39. Гончаревич, И.Ф. Вибрационная техника в пищевой промышленности [Текст] / И.Ф. Гончаревич, Н.Б. Урьев, М.А. Талейсник. – М.: Пищевая промышленность, 1977. – 276 с.
40. Гончаревич, И.Ф. Теория вибрационной техники и технологии. [Текст] / И.Ф. Гончаревич, К.В. Фролов – М.: Наука, 1981. – 320 с.
41. Гончаревич, И.Ф. Вибрация – нестандартный путь [Текст] / И.Ф. Гончаревич. – М.: Наука, 1986. – 209 с.
42. Гончаревич, И.Ф. На гребне волны: Способы перемещения в природе и технике [Текст] / И.Ф. Гончаревич. – М.: Наука, 1989. – 225 с.
43. Гортинский, В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях [Текст] / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. – М.: Колос, 1980. – 304 с.
44. Горячкин, В.П. Собрание сочинений [Текст] / В.П. Горячкин. – М.: Колос, 1965. – Т. 3. – 720 с.
45. Громаковский, Д.Г. Разработка низкочастотных кавитационных устройств для мойки поверхностей деталей, машин и приборов [Текст] / Д.Г. Громаковский, А.П. Бураков, Н.А. Карева // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13. – № 1(3). – С. 562-564.
46. Жуковский, Н.Е. Заметка о плоском рассеве [Текст] / Н.Е. Жуковский // Собрание сочинений. – 1949. – Т. 3. – М.: ГИТТЛ. – С. 515-522.
47. Данилов, Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение [Текст] / Ю.А. Данилов, Г. Г. Малинецкий. – М.: Ком Книга, 2006. – 208 с.
48. Дринча, В.М. Направления производства конкурентоспособной техники для очистки зерна и семян [Текст] / В.М. Дринча, С.С. Ямпилон // Техника и оборудование для села. – 1999. – № 3-4. – С. 10-13.

49. Дринча, В.М. Исследование сепарации семян и разработка машинных технологий их подготовки [Текст] / В.М. Дринча. – Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 2006. – 384 с.
50. Дубровский, А.А. Вибрационная техника в сельском хозяйстве [Текст] / А.А. Дубровский. – М.: Машиностроение, 1968. – 204 с.
51. Ермольев, Ю.И. Интенсификация технологических операций в воздушно-решетных зерноочистительных машинах [Текст] / Ю.И. Ермольев. – Ростов н/Д.: Изд-кий центр ДГТУ, 1998. – 494 с.
52. Заика, П.М. Динамика вибрационных зерноочистительных машин. [Текст] / П.М. Заика. – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.
53. Заика, П.М., Вибрационные системы с преобразованным сухим трением [Текст] / П.М. Заика, П.Н. Юдицкий, С.В. Калиниченко // Совершенствование рабочих органов сельскохозяйственных машин: сб. науч. тр. Украинской СХА. – 1988. – С. 4-20.
54. Заика, П.М. Вибрационное перемещение твёрдых и сыпучих тел в сельскохозяйственных машинах [Текст] / П.М. Заика. – Киев: Украинская СХА, 1998. – 625 с.
55. Заславский, Г.М. Введение в нелинейную физику: От маятника до хаоса [Текст] / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
56. Земсков, В.И. Вибрация и внешнее трение сыпучих кормовых материалов [Текст] / В.И. Земсков, И.Я. Федоренко, В.И. Лобанов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 1987. – № 2. – С. 33-35.
57. Земсков, В.И. Определение вибропоглощающих свойств кормовых материалов [Текст] / В.И. Земсков, И.Я. Федоренко, В.И. Лобанов // Техника в сельском хозяйстве. – 1990. – № 3. – С.10-11.
58. Злочевский, В.Л. Методика расчета и выбора электродвигателя для привода маятниковой мельницы [Текст] / В.Л. Злочевский, М.И. Стальная, А.М. Головачев, А.П. Борисов // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2009. – № 7 (57). – С. 54-57.

59. Иванец, В.Н. Методы моделирования непрерывно действующих смесительных агрегатов вибрационного типа для переработки дисперсных материалов [Текст] / В.Н. Иванец, Г.Е. Иванец // Хранение и переработка сельхозсырья. – 2000. – № 6. – С. 15-18.

60. Иванова, А.П. Моделирование геометрических поверхностей для вибросмесителей [Текст] / А.П. Иванова, Л.В. Межуева. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 104 с.

61. Капица, П.Л. Динамическая устойчивость маятника при вибрациях его подвеса [Текст] / П.Л. Капица // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21. – № 5. – С. 588-594.

62. Карпачева, С.М. Основы теории и расчёта горизонтальных пульсационных аппаратов и пульсаторов [Текст] / С.М. Карпачева, Л.С. Рогинский, В.М. Муратов. – 1981. – 192 с.

63. Карташов, Л.П. Влияние конструктивно-технологических параметров на результат вибросмешивания [Текст] / Л.П. Карташов, Л.В. Межуева, А.П. Иванова, В.В. Гунько // Техника в сельском хозяйстве. – 2007. – № 3. – С. 28-29.

64. Клишин А.И. Тенденция развития вибрационных высевающих аппаратов сеялок [Текст] / А.И. Клишин, Е.В. Красовских, С.А. Тарасов // Вестник Алт. гос. аграрн. ун-та. – 2004. – № 2. – С. 156-161.

65. Кобринский, А.Е. Виброударные системы (Динамика и устойчивость) [Текст] / А.Е. Кобринский, А.А. Кобринский. – М.: Наука, – 592 с.

66. Косилов, Н. И. Фракционные технологии для сепарирования зернового вороха [Текст] / Н.И. Косилов, А.В. Фоминных. – Куртамыш, 2006. – 152 с.

67. Константинов, М.М. Снижение тягового сопротивления комбинированных широкозахватных машин [Текст] / М.М. Константинов, С.Н. Дроздов // Тракторы и сельхозмашины. – 2013. – № 6. – С. 34-36.

68. Кулен, А. Современная земледельческая механика [Текст] / А. Кулен, Х. Кутперс; пер. с англ. А.Э. Габриэляна. – М.: Агропромиздат, 1986. – 394 с.

69. Лапшин, И.П. Расчет и конструирование зерноочистительных машин [Текст] / И.П. Лапшин, Н.И. Косилов. – Курган: ГИПП «Зауралье», 2002. – 168 с.

70. Левин, А.М. Обоснование конструктивно-режимных параметров вибрационно-ударного измельчителя фуражного зерна [Текст]: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.20.01 / А.М. Левин. – Новосибирск, 2005. – 21 с.

71. Левитский, Н.И. Колебания в механизмах [Текст] / Н.И. Левитский. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

72. Леонтьев, П.И. Вибрационные машины и процессы в животноводстве. Основы теории и расчета: уч. пособие для вузов [Текст] / П.И. Леонтьев, И.Я. Федоренко. – Барнаул: Алт. с.-х. институт, 1987. – 88 с.

73. Листопад, Г.Е. Вибросепарация зерновых смесей [Текст] / Г.Е. Листопад. – Волгоград: Волгогр. кн. изд-во, 1963. – 118 с.

74. Любимов, Д.В. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях [Текст] / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, А.А. Черепанов. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.

75. Магнус, К. Колебания. Введение в исследования колебательных систем [Текст] / К. Магнус. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

76. Математическая модель активного рабочего органа культиватора со стойкой в виде гибкого трубчатого элемента [электронный ресурс] – режим доступа: URL: <http://www.science-education.ru/121>.

77. Мачихин, Ю.А. Инженерная реология пищевых материалов. [Текст] / Ю.А. Мачихин, С.А. Мачихин – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 216 с.

78. Москвитин, В.В. Циклические нагрузки элементов конструкций [Текст] / В.В. Москвитин. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

79. Мун, Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров [Текст] / Ф. Мун; пер. с англ.: Мир, 1990. – 312 с.

80. Нагаев, Р.Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения [Текст] / Р.Ф. Нагаев. – М.: Наука, 1978. – 160 с.

81. Надутый, В.П. Математическая модель движения валков валковых классификаторов вибрационного типа [Текст] / В.П. Надутый, В.А. Остапенко, В.Ф. Ягнюков // Вибрации в технике и технологиях. – 2006. – № 1(43). – С. 97-99.

82. Неймарк, Ю.И. Математические модели в естествознании и технике [Текст] / Ю.И. Неймарк. – Н. Новгород: Из-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 401 с.

83. Неймарк, Ю.И. Стохастические и хаотические колебания [Текст] / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
84. Непомнящий, Е.А. Кинетика сепарирования зерновых смесей [Текст] / Е.А. Непомнящий. – М.: Колос, 1982. – 176 с.
85. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред [Текст] / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
86. Низкочастотные электровибрационные машины [Текст] / М.В. Хвингия, М.М. Тедошвили, И.А. Питимашвили и др. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 95 с.
87. Николаев, В.Н. Корма смешивает вибрация [Текст] / В.Н. Николаев, Н.С. Сергеев // Сельский механизатор. – 2002. – № 9. – С. 33.
88. Овчинников, П.Ф. Виброреология [Текст] / П.Ф. Овчинников. – Киев: Наукова думка, 1983. – 271 с.
89. Особов, В.И. Машины и оборудование для уплотнения сено-соломистых материалов [Текст] / В.И. Особов, Г.К. Васильев, А.В. Голяновский. – М.: Машиностроение, 1974. – 231 с.
90. Островский, Г.М., Пульсационная резонансная аппаратура для процессов в жидкофазных средах [Текст] / Г.М. Островский, Р.Ш. Абиев // Хим. пром. – 1998. – № 8. – С. 468-478.
91. Пальмов, В.А. Колебания упруго-пластических тел [Текст] / В.А. Пальмов. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
92. Панов, И.М. Физические основы механики почв [Текст] / И.М. Панов, В.И. Ветохин. – К.: Феникс, 2008. – 266 с.
93. Пановко, Я.Г. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
94. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки [Текст] / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
95. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
96. Пановко, Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов [Текст] / Г.Я. Пановко. – М., 2006. – 158 с.
97. Писаренко, Г.С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: справочник [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.

98. Пушко, В.А. Разработка и оптимизация параметров вибрационного смесителя с порционной загрузкой компонентов корма [Текст]: автореф. канд. тех. наук / В.А. Пушко. – Оренбург, 2004. – 19 с.

99. Рабинович, М.И. Введение в теорию колебаний и волн [Текст] / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

100. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

101. Рагульскене, В.Л. Виброударные системы [Текст] / В.Л. Рагульскене. – Вильнюс: Минтис, 1974. – 320 с.

102. Сабиев, У.К. Повышение эффективности дозирования сыпучих кормов [Текст] / У.К. Сабиев // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 2011. – № 10. – С. 25-26.

103. Сергеев, Н.С. Теоретические предпосылки к обоснованию основных параметров вибрационного смесителя сыпучих кормов [Текст] / Н.С. Сергеев, В.Н. Николаев // Вестник ЧГАУ. – 2000. – Т. 32. – С. 50-54.

104. Сорокин, С.А. Исследование вынужденных колебаний подвижной части вибрационного дозатора [Текст] / С.А. Сорокин, И.Я. Федоренко // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2006. – № 3. – С. 34-43.

105. Спиваковский, А.О. Вибрационные конвейеры, питатели и вспомогательные устройства [Текст] / А.О. Спиваковский, И.Ф. Гончаревич. – М.: Машиностроение, 1972. – 328 с.

106. Тарасевич, С.В. Исследование динамики движения сепарируемого материала на виброкачающейся решетной поверхности [Текст] / С.В. Тарасевич, В.Л. Злочевский // Хранение и переработка зерна. – 2006. – № 6. – С. 32-34.

107. Тарасов, В.П. Технологическое оборудование зерноперерабатывающих предприятий: уч. пособие [Текст] / В.П. Тарасов. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2002. – 229 с.

108. Тарунин, Е.Л. Особенности асимметричных колебаний при наличии сухого трения [Текст] / Е.Л. Тарунин // Перм. ун-т. – 2003. – № 35. – С. 167-183.

109. Терсков, Г.Д. Расчет зерноуборочных машин [Текст] / Г.Д. Терсков. – Свердловск: Гостехиздат, 1949. – 206 с.

110. Технологическое оборудование предприятий отрасли (зерноперерабатывающие предприятия): учебник [Текст] / Л.А. Глебов, А.Б. Демский, В.Ф. Веденьев, М.М. Темиров, Ю.М. Огурцов; I и III части – под ред. Л.А. Глебова, II часть – под ред. А.Б. Демского. – М.: ДеЛи принт, 2006. – 816 с.
111. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
112. Тищенко, Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна [Текст] / Л.Н. Тищенко. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.
113. Тищенко, Л.Н. Гидродинамика сепарирования зерна [Текст] / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 174 с.
114. Урьев, Н.Б. Физико-химическая механика и интенсификация образования пищевых масс [Текст] / Н.Б. Урьев, М.А. Талейсник. – М.: Пищевая промышленность, 1976. – 239 с.
115. Урьев, Н.Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов [Текст] / Н.Б. Урьев, М.А. Талейсник. – М.: Химия, 1988. – 256 с.
116. Усаковский, В.М. Инерционные насосы [Текст]. – М.: Машиностроение, 1973. – 200 с.
117. Федоренко, И.Я. Динамика регулятора для равномерного (в среднем) опускания подвешенного на канате груза [Текст] / И.Я. Федоренко // Известия вузов. Машиностроение. – 1984. – № 4. – С. 29-32.
118. Федоренко, И.Я. Схемы использования и проявления эффекта вибрационного преобразования сухого трения в механизмах и процессах сельскохозяйственных машин [Текст] / И.Я. Федоренко // Сибирский вестник сельскохозяйственной науки. – 1985. – № 8. – С. 77-83.
119. Федоренко, И.Я. Механизм трения вибрационных рабочих органов [Текст] / И.Я. Федоренко // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 1986. – № 6. – С. 14-16.
120. Федоренко, И.Я. О получении общих аналитических зависимостей с помощью вычислительного эксперимента [Текст] / И.Я. Федоренко // Машиноведение. – 1987. – № 6. – С. 7-9.
121. Федоренко, И.Я. Применение методов численного эксперимента в теории вибрационных рабочих органов [Текст] /

И.Я. Федоренко // Сибирский вестник сельскохозяйственной науки. – 1987. – № 4. – С. 69-75.

122. Федоренко, И.Я. Анализ поведения сыпучей среды при вибрации на основе теории аттрактора Лоренца [Текст] / И.Я. Федоренко // Известия Сибирского отделения АН СССР. Серия техн. наук. – 1990. – № 3. – С. 112-115.

123. Федоренко, И.Я. Механико-технологическое обоснование и разработка вибрационных кормоприготовительных машин [Текст]: автореф. дис. докт. техн. наук: 05.20.01 / Федоренко Иван Ярославович. – Челябинск, 1992. – 34с.

124. Федоренко, И.Я. Вибрационная техника сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий [Текст] / И.Я. Федоренко, П.И. Леонтьев, В.И. Лобанов. – Барнаул: Изд-во АГАУ, 1995. – Ч. 1. – 97 с.

125. Федоренко, И.Я. Самоорганизация и стохастичность в технологических машинах и аппаратах [Текст] / И.Я. Федоренко // Техника в сельском хозяйстве. – 1996. – № 1. – С. 24-27.

126. Федоренко, И.Я. Движение частицы в осциллирующем воздушном потоке [Текст] / И.Я. Федоренко // Сибирский вестник с.-х. науки. – 1996. – № 3-4. – С. 111-115.

127. Федоренко, И.Я. Вибрационная техника сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий [Текст] / И.Я. Федоренко, П.И. Леонтьев, В.И. Лобанов. – Барнаул: Изд-во АГАУ, – 1998. – Ч. 2. – 94 с.

128. Федоренко, И.Я. Проблемы механики вибрируемого зернистого слоя [Текст] / И.Я. Федоренко // Сб. науч. докл. Алтайского ГАУ. – 1999. – С. 5-10.

129. Федоренко И.Я. Моделирование реологических свойств слоя органического материала при вибрациях [Текст] / И.Я. Федоренко // Хранение и переработка сельхозсырья. – 2000. – № 10. – С. 7-9.

130. Федоренко, И.Я. Теория смешения гетерогенных систем [Текст] / И.Я. Федоренко, А.Н. Кулинич, И.Ю. Александров // Хранение и переработка с.-х. сырья. – 2000. – № 10. – С. 16-18.

131. Федоренко, И.Я. Модели синергетики в технологиях перерабатывающих производств [Текст] / И.Я. Федоренко // Вестник Алт. науки. Проблемы агропромышленного комплекса. – 2001. – № 1. – Т. 2. – С. 119-125.

132. Федоренко, И.Я. Критерии подобия гидродинамических моделей виброкипящего слоя сыпучего материала [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков // Вестник Алт. гос. аграрн. ун-та. – 2005. – № 1(17). – С. 105-108.

133. Федоренко, И.Я. Динамика виброоживленного слоя сельскохозяйственного материала [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков // Вестник Российской академии сельскохозяйственных наук. – 2005. – № 6. – С. 13-15.

134. Федоренко, И.Я. Вибрируемый зернистый слой в сельскохозяйственной технологии: монография [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков. – Барнаул: Изд-во АГАУ, 2006. – 166 с.

135. Федоренко И.Я. Методы расчета вибрационных машин на основе гидродинамических моделей сыпучего материала [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков, А.А. Гнездилов // Сибирский вестник сельскохозяйственной науки. – 2007. – № 5. – С. 93-98.

136. Федоренко, И.Я. Перемещение частицы по поперечно вибрирующей шероховатой плоскости [Текст] / И.Я. Федоренко // Машинно-технологическое, энергетическое и сервисное обслуживание сельхозпроизводителей Сибири: матер. Междунар. науч.-практ. конф. Россельхозакадемии. – 2008. – С. 548-554.

137. Федоренко, И.Я. Управление движением в системах с сухим вибропреобразованным трением [Текст] / И.Я. Федоренко, А.С. Федоренко // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2009. – № 5 (55). – С. 68-71.

138. Федоренко, И.Я. Динамика молотковой дробилки с вертикальной осью вращения ротора [Текст] / И.Я. Федоренко, В.В. Мозговых // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2009. – № 11 (61). – С. 69-75.

139. Федоренко, И. Я. Особенности проявления эффективного снижения трения в лотковых вибрационных дозаторах [Текст] / И.Я.Федоренко, У.К. Сабиев // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2011. – № 6. – С. 82-85.

140. Федоренко, И.Я. Использование модели Лоренца для описания процесса смешивания сыпучих кормовых материалов [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков, Р.Н. Котов // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2011. – № 9. – С. 81-85.

141. Федоренко, И.Я. Оптимизация конструктивно-кинематических параметров вибрационного смесителя [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков, Р.А. Котов // Вестник Новосиб. гос. аграрного ун-та. – 2012. – № 1(22). – С. 130-135.

142. Федоренко, И.Я. Обоснование конструктивно-технологических параметров зерноочистительной машины на основе гидродинамической модели виброожиженного слоя зернистого материала [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков, А.С. Федоренко // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2012. – № 1. – С. 85-90.

143. Федоренко, И.Я. Синергетические явления в сыпучей среде и их использование в технологии перерабатывающих производств [Текст] / И.Я. Федоренко, Д.Н. Пирожков // Вестник ЧГАА, 2013. – Т. 66. – С. 84-92.

144. Федоренко, И.Я. Компьютерное моделирование процесса безотрывного виброперемещения частицы [Текст] / И.Я. Федоренко, А.С. Федоренко // Ползуновский вестник.– 2014. – № 4. – С. 263-269.

145. Федоренко, И.Я. Оптимизация параметров процесса вибросмешивания в смесителе с гибким рабочим органом [Текст] / И.Я. Федоренко, Р.А. Котов // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2015. – № 4 (126). – С. 106-109.

146. Федоренко, И.Я. Моделирование ударного нагружения слоя кормового материала [Текст] / И.Я. Федоренко, А.А. Смышляев // Вестник Алт. гос. аграрного ун-та. – 2015– . № 5(127). – С. 136-141.

147. Федоткин, И.М. Кавитация, кавитационная техника и технология, их использование в промышленности [Текст] / И.М. Федоткин, И.С. Гулый. – Киев: Око, 2000. – Ч. I. – 898 с.

148. Фоминых, А.В. Повышение эффективности сепарирования зерна и сои на основе совершенствования фракционных технологий и машин [Текст]: автореф. дис. докт. техн. наук / А.В. Фоминых. – Челябинск, 2006. – 26 с.

149. Хакен, Г. Синергетика [Текст] / Г. Хакен. – М.: Мир, 1980. – 404 с.

150. Членов, В.А. Сушка сыпучих материалов в виброкипящем слое [Текст] / В.А. Членов, Н.В. Михайлов. – М.: Стройиздат, 1967. – 224 с.

151. Членов, В.А. Виброкипящий слой [Текст] / В.А. Членов, Н.В. Михайлов. – М.: Наука, 1972. – 340 с.

152. Широко, И.В. Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений: сб. ст.; пер. с англ. [Текст] / И.В. Широко. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

153. Шустер, Г. Детерминированный хаос: Введение [Текст] / Г. Шустер. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

154. Ямпиров, С.С. Исследование способов псевдооживления зерновых материалов [Текст] / С.С. Ямпиров, В.М. Дринча // Вестник Российской академии сельскохозяйственных наук. – 1998. – № 6.

155. Ямпиров, С.С. Современные тенденции производства сепараторов для предварительной очистки зерновых материалов [Текст] / С.С. Ямпиров // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 1999. – № 11. – С. 40-44.

156. Ярошевич, М.П. Динаміка розбігу вібраційних машин дебалансним приводом [Текст] / М.П. Ярошевич, Т.С. Ярошевич. – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.

157. Яруллин, Р.Б. Интенсификация технологических процессов АПК с использованием вибромашин [Текст] / Р.Б. Яруллин // Техника в сельском хозяйстве. – 2007. – № 6. – С. 53-55.

158. Яцун, С.Ф. Вибрационные машины и технологии для переработки гранулированных сред: монография [Текст] / С.Ф. Яцун, О.Г. Локтионова. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 296 с.

159. Ezersky A.V. Temporal intermittency of chaos in parametrically excited capillary ripples. *Europhys. Lett.* 16(661)1991. – P. 661-666.

160. A.Kudrolli, J.P. Gollub, Localized spatiotemporal chaos in surface waves. *Phys. Rev. E.*, 54(R1052) 1996. – P. 1052-105.

161. A.Kudrolli, J.P. Gollub, Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio. *Physica D*, 97(133) 1996. – P. 133-154.

Научное издание

ФЕДОРЕНКО ИВАН ЯРОСЛАВОВИЧ

**ВИБРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И УСТРОЙСТВА В АПК**

Монография

Редактор О.А. Самтынова
Технический редактор И.В. Сильченко

Подписано в печать 31.03.2016 г. Формат 60*84/16
Бумага для множительных аппаратов. Печать ризографная.
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 17,8. Уч.-изд. л. 14,5.
Тираж 100 экз. Заказ № 3606

РИО Алтайского ГАУ
656049, г. Барнаул, пр. Красноармейский, 98
Тел. 62-84-26